

第 5 次作业

截止日期：3 月 31 日

习题 1. P69 习题 2.13.

证明. 由于 $\lambda(t) > 0$, 我们知 $m(t)$ 是严格单调递增函数, 所以它存在一个严格单调递增的反函数 $m^{-1}(t)$.

我们来验证 $N^*(t) = N[m^{-1}(t)]$ 是一个 Poisson 过程.

(1) $N^*(0) = N(m^{-1}(0)) = N(0) = 0$.

(2) 设 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 由单调性我们知 $0 = m^{-1}(t_0) < m^{-1}(t_1) < \cdots < m^{-1}(t_n)$. 由 $\{N(t)\}$ 的独立增量性, 我们知

$$N(m^{-1}(t_0)), N(m^{-1}(t_0), m^{-1}(t_1)), \cdots, N(m^{-1}(t_{n-1}), m^{-1}(t_n))$$

相互独立. 于是 $N^*(t_0), N^*(t_1) - N^*(t_0), N^*(t_2) - N^*(t_1), \cdots, N^*(t_n) - N^*(t_{n-1})$ 相互独立.

(3) 对于 $s, t \geq 0$, 我们有

$$\begin{aligned} P(N^*(t+s) - N^*(s) = n) &= P(N(m^{-1}(t+s)) - N(m^{-1}(s)) = n) \\ &= p(N(m^{-1}(s), m^{-1}(t+s)) = n) \\ &= e^{-m(m^{-1}(t+s)) + m(m^{-1}(s))} \frac{[m(m^{-1}(t+s)) - m(m^{-1}(s))]^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-t} t^n}{n!}. \end{aligned}$$

这里注意到 $m(m^{-1}(s), m^{-1}(t+s)) = m(0, m^{-1}(t+s)) - m(0, m^{-1}(s)) = m(m^{-1}(t+s)) - m(m^{-1}(s)) = t$. □

习题 2. P79 练习 3.1(3).

解. $N(k) = j$ 说明在时间 $[0, k]$ 中恰有 j 次更新, 且第 $j+1$ 次更新发生在 j 之后. 所以我们知前 j 次更新有 k 次时间间隔为 1, 第 $j+1$ 次更新时间间隔为 1. 于是我们知

$$P(N(k) = j) = C_j^k p^{k+1} (1-p)^{j-k}.$$

注意到 $\sum_{j=k}^{\infty} C_j^k p^{k+1} (1-p)^{j-k} = 1$, 所以我们知 $N(k) \geq k$, a.s.. □

习题 3. P131 习题 3.2.

解. 对于 $k = 1$, 我们有

$$p_0 = P(N(1) = 0) = P(X_1 = 2) = 0.5, \quad p_1 = P(N(1) = 1) = P(X_1 = 1) = 0.5.$$

对于 $k = 2$, 我们有

$$\begin{aligned} p_1 &= P(N(2) = 1) = P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1, X_2 = 2) \\ &= P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) = 0.75, \\ p_2 &= P(N(2) = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = 0.25. \end{aligned}$$

对于 $k = 3$, 我们有

$$\begin{aligned} p_1 &= P(N(3) = 1) = P(X_1 = 2, X_2 = 2) = 0.25, \\ p_3 &= P(N(3) = 3) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0.125, \\ p_2 &= 1 - p_1 - p_3 = 0.625. \square \end{aligned}$$

习题 4. 选做一个二维 Poisson 过程是一个在平面上随机发生的事件的过程, 它满足

- (1) 对于面积为 A 的任何区域, 在这个区域中的事件个数具有均值为 λA 的 Poisson 分布.
- (2) 在不相交的区域中的事件个数是独立的.

对于这样的过程, 考察平面中的一个任意的点, 而以 X 记它到最近的事件的 (欧式) 距离. 证明:

- (1) $P\{X > t\} = e^{-\lambda\pi t^2},$
- (2) $E[X] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$

证明. (1) 以 N_t 表示在以该点为中心, 半径为 r 的圆中发生的事件数, 则 N_t 服从参数为 $\lambda\pi t^2$ 的 Poisson 分布

$$P\{X > t\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda\pi t^2}.$$

$$(2) E[X] = \int_0^\infty P\{X > t\} dt = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}. \quad \square$$