

第 7 次作业

截止日期：4 月 14 日

习题 1. 课本 P96 练习 3.3 (2)

证明. 设 $G(x) = P(X_1 \leq x)$, $F(x) = P(X \leq x)$. 用 $m_D(t) = E[N_D(t)]$ 表示延迟更新过程的更新函数, 用 F_0 表示常数 0 的分布函数, 则有

$$\begin{aligned} m_D(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} E[I[S_j \leq t]] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1 + (S_j - X_1) \leq t) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} G * F_{j-1}(t) \quad (\text{独立随机变量的和的分布函数等于它们各自分布函数的卷积}) \\ &= G(t) + \sum_{j=1}^{\infty} G * F_j(t) \\ &= G(t) + \sum_{j=1}^{\infty} G * (F_{j-1} * F)(t) \\ &= G(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (G * F_{j-1}) * F(t) \quad (\text{卷积服从结合率}) \\ &= G(t) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} G * F_{j-1} \right) * F(t) \\ &= G(t) + \int_0^t m_D(t-s) dF(s). \quad (\text{课本定理 3.1(6)}) \quad \square \end{aligned}$$

习题 2. 课本 P105 练习 3.4 (3)

提示. 将该过程视为一个多个状态的系统, 可得第 i 道装修工序的房屋在所有装修房屋中的比例为 $\mu_i / (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)$. $\square$

习题 3. 设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个更新过程, 已知其更新函数 $m(t) = E[N(t)]$. 求 $g(t) := E[N(t)^2]$.

解. 令 S_1 是第一次更新的时间, 则

$$g(t) = E[E[N(t)^2|S_1]] = \int_0^t E[N(t)^2|S_1 = x]dF(x).$$

注意到

$$\begin{aligned} E[N(t)^2|S_1 = x] &= E[(N(x, t] + N(x))^2|S_1 = x] \\ &= E[(N(x, t] + 1)^2|S_1 = x] \\ &= E[(N(t - x) + 1)^2], \end{aligned}$$

我们有

$$g(t) = F(t) + 2 \int_0^t m(t - x)dF(x) + \int_0^t g(t - x)dF(x).$$

又注意到

$$\int_0^t m(t - x)dF(x) = m * F(t) = m(t) - F(t),$$

于是我们知 g 是如下更新方程的解:

$$g(t) = 2m(t) - F(t) + \int_0^t g(t - x)dF(x).$$

注意到 $2m(t) - F(t)$ 是局部有界的, 由课本定理 3.2 我们有

$$\begin{aligned} g(t) &= 2m(t) - F(t) + [2m - F] * m(t) \\ &= m(t) + 2m * m(t). \end{aligned}$$

□

习题 4. 某保险公司对某种保险有两档收费率, 分别为每单位时间 r_1 (称为一档保费) 和 r_0 (称为二档保费). 设参保人一开始缴纳一档保费. 如果他缴纳一档保费之后, 在连续 s 个单位时间内没有发生理赔, 那么他会将保费切换到二档保费; 一旦发生理赔, 参保人会维持或切换到一档保费. 设理赔的发生构成一个参数 λ 的 Poisson 过程. 假设参保人的参保时间充分的长, 求他单位时间所付的平均保费.

解. 如果当参保人按收费率 r_1 付费时, 我们说系统处在开状态, 否则称系统处于关状态, 于是我们得到一个开关系统. 记 X 是相继理赔间的时间间隔, U 是开状态时间, 则 $U = \min(X, s)$. 于是

$$E[U] = E[\min(X, s)] = \int_0^s x\lambda e^{-\lambda x}dx + se^{-\lambda s} = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda s}).$$

于是我们可得参保人以收费率 r_i 付费的时间比例 ($i = 1, 2$):

$$P_1 = E[U]/E[X] = 1 - e^{-\lambda s}, \quad P_0 = 1 - P_1 = e^{-\lambda s}.$$

于是单位时间所付的平均保费为

$$r_0P_0 + r_1P_1 = r_1 - (r_1 - r_0)e^{-\lambda s}.$$

□