第 8 次作业

截止日期：4 月 21 日

习题 1. 课本 P112 练习 3.5(2).

解. $(t-x;t]$; $[t,t+x]$. □

习题 2. 课本 P118 练习 3.6(3).

解. 我们有

$$P(X \le x) = \begin{cases} \frac{x}{b} & 0 \le x \le b \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

$$P(Y \le x) = \begin{cases} \frac{x}{b}(2-\frac{x}{b}) & 0 \le x \le b \\ 1 & x > b. \end{cases}$$

注意到当 $0 \le x \le b$ 时，$2-\frac{x}{b} \ge 1$，所以 $P(X \le x) \le P(T \le x)$，于是 X 随机大于 Y. □

习题 3. 课本 P133 习题 3.13.

证明. 当 t 充分大时，剩余寿命分布函数近似为 $\frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds$，于是密度函数近似为

$$\frac{1}{\mu}\overline{F}(y) = (\lambda/k!)\int_{\lambda y}^{\infty} s^{k-1}e^{-s}ds.$$ □

习题 4. 课本 P133 习题 3.15.

解. 我们有

$$\begin{aligned} P(R(t) > x | A(t) = s, N(t) = n) &= P(S_{n+1} - t > x | t - S_n = s, S_{n+1} > t) \\ &= \frac{P(S_{n+1} - t > x, t - S_n = s, S_{n+1} > t)}{P(t - S_n = s, S_{n+1} > t)} \\ &= \frac{P(X_{n+1} > x + s, S_n = t - s)}{P(X_{n+1} > s, S_n = t - s)} \\ &= \frac{P(X_{n+1} > x + s)}{P(X_{n+1} > s)} = \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(s)}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}P(R(t)>x|A(t)=s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(R(t)>x|A(t)=s, N(t)=n)P(N(t)=n|A(t)=s)\\ &= \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(s)}\sum_{0}^{\infty} P(N(t)=n|A(t)=s)\\ &= \frac{\overline{F}(t+s)}{\overline{F}(s)}, s\le t.\end{aligned}$$

类似地可得

$$P(R(t)>2x|A(t+x)=s) = \frac{\overline{F}(s+x)}{\overline{F}(s)},\ s\ge x. \qquad \square$$