

第 9 次作业

截止日期：4 月 28 日

习题 1. 课本 P134 习题 3.18.

解. 我们用有偿更新过程来描述这一过程. 设 T 是自行车的寿命, 其为一个有分布函数 $F(t)$ 的随机变量. 自行车实际使用时间 $X = \min(3, t)$. 每次更换自行车所需要的费用为一个随机变量 $Y = (\eta - 80)I(T \geq 3) + (\eta - 10)I(T < 3)$. 于是每年的平均费用为 $E[Y]/E[X]$. 下面我们来计算 $E[X]$ 和 $E[Y]$.

首先我们有

$$E[X] = \int_0^\infty P(X > x)dx = \int_0^\infty P(3 > x, T > x)dx = \int_0^3 P(t > x)dx = \int_0^3 \bar{F}(x)dx.$$

其次, 我们有

$$E[Y] = \int_0^3 (E\eta - 10)dF(t) + \int_3^\infty (E\eta - 80)dF(t) = 70F(3) + E\eta - 80.$$

所以每年的平均费用为 $\frac{70F(3) + E\eta - 80}{\int_0^3 \bar{F}(x)dx}$. □

习题 2. 生产线按顺序生产某种产品, 且每件产品合格的概率为 p ($0 < p < 1$). 执行以下的抽检方案: 开始时逐一检查每件产品, 直到连续出现 k 件合格品, 之后以概率 α ($0 < \alpha < 1$) 检查每件产品, 直到查出不合格品, 此时一个循环结束. 接着重新开始逐一检查每件产品, 如此循环下去. 求长时间看被检查产品所占的比例.

解. 将该问题看作一个有偿更新过程. 于是长时间看被检查产品所占的比例等于一个循环中被检查的产品数的期望除以一个循环中生产的产品数的期望.

由题意, 一个循环分为两个阶段, 全面检查阶段和抽查阶段. 我们分别计算两个阶段所对应的被检查的产品数的期望和生产的的产品数的期望.

我们先考虑第一个阶段, 此时被检查的产品数和生产的产品数相同, 它们的期望也相同. 为方便叙述, 不妨称在检查中连续出现的 k 件合格品为 k 件合格品串. 于是这个阶段被检查的产品数为第一次出现 k 件合格品串时被检查的产品数, 记为 N_k . 下面推导 $M_k := E[N_k]$ 的递推公式. 为此在第一个 $k-1$ 件合格品出现时, 对下一件产品的情况分类考虑. 令 G_k 表示 “(第一个 $k-1$ 件

合格品出现时) 下一件产品合格”。如果 G_k 发生, 则此前的 $k-1$ 件合格品串与该件合格品串构成一个 k 件合格品串, 所以 $E[N_k - N_{k-1} | G_k] = 1$; 而如果 G_k^c 发生, 则此前出现的 $k-1$ 件合格品串失效, 需要等待新的 k 件合格品串, 于是 $E[N_k - N_{k-1} | G_k^c] = E[N_k + 1]$. 由于 $P(G_k) = p$, 根据全期望公式我们有

$$E[N_k - N_{k-1}] = p + (1-p)E[N_k + 1],$$

即

$$M_k - M_{k-1} = p + (1-p)(1 + M_k),$$

从而可得

$$pM_k = M_{k-1} + 1,$$

注意到 $M_1 = 1/p$, 我们有

$$M_k = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^k} = \frac{1/p^k - 1}{1-p}.$$

对于第二阶段, 每件检查产品不合格的概率为 $q = 1-p$, 于是发现一件不合格品平均要检查的产品数为 $1/q$. 而每件产品被发现是不合格品的概率为 αq , 所以发现一件不合格品平均出产的产品数为 $1/\alpha q$. 因此

$$E[\text{一个循环中被检查的产品数}] = E[N_k] + 1/q,$$

$$E[\text{一个循环中生产的产品数}] = E[N_k] + 1/\alpha q.$$

于是长时间被检查产品所占比例为

$$E[\text{一个循环被检查的产品数}] / E[\text{一个循环生产的产品数}] = \frac{\alpha}{\alpha + (1-\alpha)p^k}. \quad \square$$