

转移速率矩阵

保守马氏链

马氏链的结构

第 24 讲 连续时间马氏链的结构

对于泊松过程 $\{N(t)\}$, 有

$$P(N(s, t + s] < \infty) = 1, s, t \geq 0.$$

这说明在概率 1 的意义下, 泊松过程在任何有限的时间内只有有限次转移, 因为在转移点事件已经发生, 所以轨迹是右连续的.

对于一般的连续时间马尔科夫链, 我们称其为**规则马氏链**, 如果在概率 1 意义下, 有限时间内只能转移有限次.

规则马氏链 $\{X(t)\}$ 的轨迹是阶梯函数. 因为在跳跃点质点已经到达新的状态, 所以规则马氏链的轨迹也是右连续的, 即对 $t \geq 0$,

$$\lim_{h \downarrow 0} P(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon) = 0.$$

此后无特殊声明, 马氏链都是规则马氏链.

用 $P_i(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot | X(0) = i)$, 于是我们得到对于任何 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{h \downarrow 0} X(t+h) = X(t) \text{ a.s.}$$

于是 $X(t+h)$ 依概率收敛到 $X(t)$, 即对任何 $\epsilon > 0$, $t \geq 0$,

$$\lim_{h \downarrow 0} P_i(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon) \leq \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon)}{P(X(0) = i)} = 0, \quad i \in I.$$

引理 1.1

设 $g(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上连续和非负, 满足 $g(0) = 0$, $g(t+s) \leq g(t) + g(s)$, $s, t \geq 0$, 则存在极限

$$q = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(t)}{t} = \sup_{t > 0} \frac{g(t)}{t} \in [0, \infty].$$

证明.

对于 $0 < h < t$, 有正整数 n 和 $s \in (0, h)$ 使得 $t = nh + s$. 由

$$g(t)/t \leq ng(h)/t + g(s)/t = (g(h)/h)(nh/t) + g(s)/t$$

知道当 $h \rightarrow 0$ 时, $g(t)/t \leq \liminf_{h \downarrow 0} g(h)/h$. 这就得到

$$\limsup_{h \downarrow 0} g(t)/t \leq \sup_{t > 0} g(t)/t \leq \liminf_{h \downarrow 0} g(h)/h.$$

□

定理 1.2

对于状态空间为 I 的马氏链 $\{X(t)\}$, 有以下结论:

(1) $p_{ij}(t)$ 在 $t = 0$ 连续: $\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = p_{ij}(0)$;

(2) 我们有

$$\sum_{j \in I} |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq 2(1 - p_{ii}(h)),$$

从而 $p_{ij}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续;

(3) 对于 $t \geq 0$, 恒有 $p_{ii}(t) > 0$;

(4) $p_{ij}(t)$ 在 $t = 0$ 有右导数

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} = q_{ij},$$

其中 $-\infty \leq q_{ii} \leq 0$, 当 $i \neq j$ 时, $q_{ij} \geq 0$;

(5) 对于 $i \in I$, 有

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq |q_{ii}|.$$

转移速率矩阵

保守马氏链

马氏链的结构

证明.

(1) 对于 $\epsilon \in (0, 1)$, 利用 $p_{ii}(0) = 1$ 得到 $t \downarrow 0$ 时,

$$|p_{ii}(0) - p_{ii}(t)| = 1 - P_i(X(t) = i) = P_i(X(t) \neq i) = P_i(|X(t) - X(0)| \geq \epsilon) \rightarrow 0.$$

对于 $j \neq i$, 利用 $p_{ij}(t) + p_{ii}(t) \leq 1$ 知道 $t \downarrow 0$ 时, $0 \leq p_{ij}(t) \leq 1 - p_{ii}(t) \rightarrow 0$.

(2) 利用 $p_{ij}(t) \leq 1$ 和 K-C 方程我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| &= \sum_{j \in I} \left| \sum_{k \neq i} (p_{ik}(h)p_{kj}(t) + (1 - p_{ii}(h)) \sum_{j \in I} p_{ij}(t)) \right| \\ &\leq \sum_{k \neq i} \sum_{j \in I} p_{ik}p_{kj}(t) + (1 - p_{ii}(h)) \sum_{j \in I} p_{ij}(t) \\ &= \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) + 1 - p_{ii}(h) \\ &= 2(1 - p_{ii}(h)). \end{aligned}$$

(3) 由 (1) 知道当 n 充分大时 $p_{ii}(t/n) > 0$, 于是

$$p_{ii}(t) = \left[p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n > 0.$$

转移速率矩阵

保守马氏链

马氏链的结构

证明.

(4) 先考虑 $i = j$ 的情形. 定义 $[0, \infty)$ 上的非负连续函数 $g(t) = -\ln p_{ii}(t)$, 有 $g(0) = 0$ 和

$$g(t+s) = -\ln p_{ii}(t+s) \leq -\ln(p_{ii}(t)p_{ii}(s)) = g(t) + g(s).$$

由引理 1.1, 我们知存在 $q_i \in [0, \infty]$ 使得

$$q_i := \sup_{t>0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(t)}{t}, \quad (1.1)$$

注意到当 $t \downarrow 0$ 时, $g(t) \rightarrow 0$, 我们有

$$\frac{p_{ii}(t) - 1}{t} = \frac{e^{-g(t)} - 1}{t} = \frac{g(t)}{t} \frac{e^{-g(t)} - 1}{g(t)} \rightarrow -q_i.$$

取 $q_{ii} = -q_i$ 就得到结论.

转移速率矩阵

保守马氏链

马氏链的结构

证明.

(5) 对于任何正整数 m , 利用

$$\begin{aligned}\sum_{j \neq i, j \leq m} q_{ij} &= \lim_{t \downarrow 0} \sum_{j \neq i, j \leq m} \frac{p_{ij}(t)}{t} \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \sum_{j \neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii},\end{aligned}$$

从而得证.



推论 1.3

定义 $q_i = -q_{ii}$.

- (1) 如果 $q_i = 0$, 则对所有的 $t \geq 0$, $p_{ii}(t) = 1$;
- (2) $q_i = \sup_{t>0} (1 - p_{ii}(t))/t$.

证明.

(1) 由 (1.1) 我们有

$$\sup_{t>0} \frac{g(t)}{t} = \sup_{t>0} \frac{-\ln p_{ii}(t)}{t} = q_i = 0,$$

所以 $p_{ii}(t) = 1$ 对一切 $t \geq 0$ 成立.

(2) 由 (1.1) 我们有 $g(t)/t \leq q_i$, 所以有

$$p_{ii}(t) = \exp\left(-\frac{g(t)}{t}t\right) \geq e^{-q_i t}.$$

因为 $t \geq 0$, 所以有不等式 $1 - e^{-q_i t} \leq q_i t$ 我们有

$$\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \leq \frac{1 - e^{-q_i t}}{t} \leq q_i.$$

再结合 $p'_{ii}(0) = -q_i$ 就得到结论 (2).



由于 $p_{ij}(t)$ 是马氏链从 i 出发, t 时处于 j 的概率, 所以称 $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ 是质点从 i 出发, 下一步向 j 转移的概率或强度, 称

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in I}$$

为马氏链的转移速率矩阵或转移强度矩阵.

由于 q_{ij} 是转移概率 $p_{ij}(t)$ 在 $t = 0$ 的导数, 所以又称 Q 为马氏链的无穷小矩阵, 或简单地称为 Q 矩阵.

定义 2.1

如果对于一切 $i \in I$, 有

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = |q_{ii}| < \infty,$$

则称转移速率矩阵 Q 或马氏链是 保守的.

因为 $q_{ii} = p'_{ii}(0) \leq 0$, 所以当所有的 $|q_{ii}| < \infty$ 时, 保守性等价于

$$\sum_{j \in I} q_{ij} = 0, \quad i \in I.$$

如果将 q_{ii} 视为马氏链从 i 出发, 下一步继续留在 i 的速率, 将 $\sum_{j \neq i} q_{ij}$ 视为从 i 出发, 下一步离开 i 的速率, 保守性说明继续停留的速率和转出的速率大小相等, 方向相反.

如果 $q_{ii} = 0$, 由推论 1.3 我们知对一切 $t > 0$,

$$p_{ii}(t) = P(X(t) = i | X(0) = i) = 1.$$

这说明 i 是吸引状态: 质点一旦到达状态 i 就不再离开. 已知 $X(0) = i$ 时, 用

$$\tau = \inf\{t | X(t) \neq i\}$$

表示质点在 i 的停留时间, 则从 $q_{ii} = 0$ 得到 $P_i(\tau = \infty) = 1$.

命题 2.2

对于马氏链 $\{X(t)\}$, $q_i = |q_{ii}|$ 和 $t, h > 0$, 有以下结论:

- (1) $P(X(t+h) = j | X(u) = i, u \in [0, t]) = p_{ij}(h);$
- (2) $P(X(u) = i, u \in [0, t] | X(0) = i) = e^{-q_i t}.$

证明.

(1) 已知 $X(t) = i$ 的条件下, $X(t+h)$ 和 $\{X(u), u \in [0, t]\}$ 独立, 于是有

$$\begin{aligned} & P(X(t+h) = j | X(u) = i, u \in [0, t]) \\ &= P(X(t+h) = j | X(t) = i, X(u) = i, u \in [0, t]) \\ &= P(X(t+h) = j | X(t) = i) \\ &= p_{ij}(h). \end{aligned}$$

证明.

- (2) $q_i = 0$ 是结论显然成立. 只需对 q_i 是正数的情况证明. 集合列 $B_n = \{jt/2^n | 1 \leq j \leq 2^n\}$ 单调增加. 事件列 $A_n = \{X(jt/2^n) = i, 1 \leq j \leq 2^n\} = \{X(u) = i, u \in B_n\}$ 单调减小: $A_1 \supset A_2 \supset \dots$. 因为 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 在 $[0, t]$ 中稠密, $X(t)$ 的轨迹又是阶梯形状和右连续的, 所以

$$\{X(u) = i, u \in [0, t]\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n \text{ a.s..}$$

利用概率的连续性我们有

$$\begin{aligned} P(X(u) = i, u \in [0, t] | X(0) = i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n | X(0) = i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X(jt/2^n), 1 \leq j \leq 2^n | X(0) = i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [p_{ii}(t/2^n)]^{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [p_{ii}(t/n)]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [p_i i(0) + p'_{ii}(0)(t/n) + o(t/n)]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - q_i t/n + o(t/n)]^n \\ &= e^{-q_i t}. \end{aligned}$$



回忆我们已经规定 $1/0 = \infty$, $0/0 = 0$.

定理 2.3

对于连续时间马氏链 $\{X(t)\}$, $q_i = |q_{ii}|$, 用 τ 表示质点在状态 i 的停留时间, 则有

- (1) $P(\tau > t | X(0) = i) = e^{-q_i t}$, $t \geq 0$;
- (2) $E[\tau | X(0) = i] = 1/q_i$;
- (3) 当 $j \neq i$ 时, $P(X(\tau) = j, \tau \leq t | X(0) = i) = \frac{q_{ij}}{q_i}(1 - e^{-q_i t})$;
- (4) 当 $j \neq i$ 时, $P(X(\tau) = j | X(0) = i) = \frac{q_{ij}}{q_i}$;
- (5) 在条件 $X(0) = i$ 下, τ 和 $X(\tau)$ 独立;
- (6) 当所有的 $q_i < \infty$ 时, 马氏链 $\{X(t)\}$ 是保守的.

转移速率矩阵

保守马氏链

马氏链的结构

证明.

只需对 q_i 是整数的情况证明.

(1) 由命题 2.2 (2) 我们有:

$$P(\tau > t | X(0) = i) = P(X(u) = i, u \in [0, t] | X(0) = i) = e^{-q_i t}.$$

(2) 结论 (1) 说明在条件 $X(0) = i$ 下, $\tau \sim \mathcal{E}(q_i)$, 所以有

$$E(\tau | X(0) = i) = 1/q_i.$$

证明.

- (3) 重新定义 $B_n = \{jt/2^n | 1 \leq j \leq 2^n - 1\}$, $A_n = \{X(u) = i, u \in B_n\}$. A_n 单调减少, 使得 $\{X(u) = t, u \in [0, t]\} = \cap_{j=1}^{\infty} A_n$. 对于 t , $\Delta t > 0$ 和 $j \neq i$, 由 Taylor 展开公式 $P(X(t) = j | X(t - \Delta t) = i) = p_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$ 我们知 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(X(t) = j | X(t - \Delta t) = i) = q_{ij}dt$. 取 $\Delta = t/2^n$, 得到

$$\begin{aligned}
 & P(X(\tau) = j, \tau = t | X(0) = i) \\
 &= P(\{X(u) = i, u \in [0, t]\}, X(t) = j | X(0) = i) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n, X(t) = j | X(0) = i) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n | X(0) = i) P(X(t) = j | A_n, X(0) = i) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [P(t/2^n)]^{2^n - 1} P(X(t) = j | X(t - \Delta t) = i) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q_i t/2^n + o(t/2^n))^{2^n - 1} (q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)) \\
 &= e^{-1_i t} q_{ij} dt.
 \end{aligned}$$

两边对于 $t \in [0, s]$ 积分得到

$$P(X(\tau) = j, \tau \leq s | X(0) = i) = \int_0^s q_{ij} e^{-q_i t} dt = \frac{q_{ij}}{q_i} (1 - e^{-q_i s}).$$

证明.

(4) 在 (3) 中让 $t \rightarrow \infty$ 可得.

(5) 这时 $p_j = q_{ij}/q_i$ 是 $X(\tau)|X(0) = i$ 的概率分布. 由 (1) 知道 $P_i(\tau \leq t) = 1 - e^{-q_i t}$. 引入 $P_i(\cdot) = P(\cdot|X(0) = i)$, 用 (3) 和 (4) 得到

$$P_i(X(\tau) = j, \tau \leq t) = P_i(X(\tau) = j)P_i(\tau \leq t), \quad t \geq 0.$$

(6) 当 $q_i = 0$ 时, 我们知 $\sum_{j \in I} q_{ij} = 0$. 当 $q_i > 0$ 时, 由 (1) 和 (4) 知 $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i$. □

由上面定理, 我们知当 $q_i = \infty$ 时, 有 $\bar{G}(t) = P(\tau > t|X(0) = i) \equiv 0$, 于是 $P(\tau = 0|X(0) = i) = 1$. 这说明质点在状态 i 无法停留, 所以称 i 为瞬时状态. 我们后面只考虑所有状态均非瞬时状态的情形: $q_i = |q_{ii}| < \infty$.

设马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移速率矩阵 Q , $q_i = |q_{ii}|$. 定义

$$k_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i, & \text{当 } q_i > 0, j \neq i \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } q_i > 0, j = i \text{ 时,} \\ \delta_{ij}, & \text{当 } q_i = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

则 $K = (k_{ij})$ 的各行之和为 1. 定义

$$\tau_0 = 0$$

$$\tau_1 = \inf\{t > 0 | X(t) \neq X(0)\},$$

$$\tau_2 = \inf\{t > \tau_1 | X(t) \neq X(\tau_1)\},$$

.....

$$\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} | X(t) \neq X(\tau_{n-1})\},$$

..... .

则 τ_i 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的第 i 次转移时刻. $T_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ 是第 i 次转移后的停留时间.

转移速率矩阵

保守马氏链

马氏链的结构

我们有下面的结果：

- (1) $X_n = X(\tau_n) (n = 0, 1, \dots)$ 是以 $K = (k_{ij})$ 为一步转移概率矩阵的离散时间马氏链；
 - (2) 沿着嵌入链 $\{X(\tau_n)\}$ 的给定轨迹 $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots$ ，马氏链各状态的依次停留时间 $T_0, T_1, \dots$ 相互独立， T_j 服从指数分布 $\mathcal{E}(q_{ij})$ ， $j = 0, 1, 2, \dots$ ；
 - (3) 设 $\{Y_n\}$ 是离散时间马氏链，以前面定义的 $K = (k_{ij})$ 为转移概率矩阵。对每个 $i \in I$ ，假设质点每次到达 i 后，在 i 的停留时间是相互独立的随机变量，服从共同的指数分布 $\mathcal{E}(q_i)$ ，停留结束时以概率 k_{ij} 转移到状态 j ($j \neq i$)。进一步假设质点在不同状态的停留时间相互独立，则用 $X(t)$ 表示 t 时质点的状态时， $X(t)$ 是连续时间的马氏链，有转移速率矩阵 Q 。
- 在上面 (1) 中，称离散时间马氏链 $\{X_n\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的嵌入链或跳跃链。同理上面的 (3) 中也称离散时间马氏链 $\{Y_n\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的嵌入链。

例 3.1

强度为 λ 的泊松过程是马氏链，嵌入链有一步转移概率

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + 1 \geq 1, \\ 0, & j \neq i + 1. \end{cases}$$

质点在任何状态的停留时间是相互独立的，服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$ ，所以 $q_i = \lambda$. 于是

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & j = i \geq 0, \\ \lambda, & j = i + 1 \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

例 3.2

设连续时间马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移概率矩阵

$$P(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3e^{-3t} & 1 - e^{-3t} & 2 - 2e^{-3t} \\ 2 - 2e^{-3t} & 1 + 4e^{-3t} & 2 - 2e^{-3t} \\ 2 - 2e^{-3t} & 1 - e^{-3t} & 2 + 3e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

- (1) 计算转移速率矩阵 Q ;
- (2) 计算质点在各状态的平均停留时间;
- (3) 计算嵌入链的一步转移概率矩阵;
- (4) 对于马氏链的运动情况给予简单解释.

证明.

(1) 容易计算出

$$Q = P'(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 6 & -12 & 6 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

(2) 设马氏链的状态为 1, 2, 3, 质点在 1, 2, 3 的平均停留时间分别是

$$1/q_1 = 5/9, 1/q_2 = 5/12, 1/q_3 = 5/9.$$

(3) 根据 $k_{ij} = q_{ij}/q_i$ ($j \neq i$), 可以计算出嵌入链的一步转移矩阵

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 3/9 & 6/9 \\ 6/12 & 0 & 6/12 \\ 6/9 & 3/9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 质点按照离散马氏链的一步转移概率矩阵 K 在状态 1, 2, 3 中转移, 这三个状态互通. 质点每次到达状态 i , 在 i 的停留时间是服从指数分布的随机变量, 其数学期望 $1/q_i$ 是在 i 的平均停留时间. 所有不同次到达的停留时间是相互独立的, 在不同状态的停留时间也是相互独立的. 质点从 i 出发的条件下, t 时处于状态 j 的概率是 $p_{ij}(t)$. $\square$