第 25 讲 Kolmogorov 方程

回忆 K-C 方程是

$$p_{ij}(t+s)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)p_{kj}(s),\ \ i,j\in I.$$

让我们约定把右边称为前，把左边称为后. 在上式两边对于 t 在 $t=0$ 处求导数，形式上得到

$$p'_{ij}(s)=\sum_{k\in I}q_{ik}p_{kj}(s).$$

写成矩阵的形式就得到 $P'(t)=QP(t)$. 如果对于 s 在 $s=0$ 处求导，形式上得到

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)q_{kj}.$$

写成矩阵的形式就得到 $P'(s)=P(s)Q$.

定理 1.1

设 Q 是连续时间马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移速率矩阵，$q_i = |q_{ii}|$，则有

(1) $P'(t) = QP(t)$，或等价地写成

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} q_{ik}p_{kj}(t),\ \ i,j \in I;$$

(2) 当 $q = \sup\{q_i | i \in I\} < \infty$ 时，有 $P'(t) = P(t)Q$，或等价地写成

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in I} p_{ik}(t)q_{kj},\ \ i,j \in I.$$

设右连续函数 $g(t)$ 满足

$$g(t+s)=g(t)g(s)>0,\ \ s,t>0,$$

则 $g(t)$ 是指数函数，即

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(ct)^k=e^{ct},\ \ g'(t)=cg(t),\ \ c=g'(0).$$

于是得到

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(g'(0)t)^k=\exp(g'(0)t).$$

对于方阵 A，当 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k/k!$ 的每个元收敛时，定义

$$e^A=\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k,\ \ A^0=\text{单位矩阵}.$$

对于马氏链的转移概率矩阵 $P(t)$ 和转移速率矩阵 Q，由 K-C 方程我们得

$$P(t+s) = P(t)P(s), \quad s, t \geq 0,$$

所以我们也期望有某个矩阵 C，使得

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(Ct)^k \equiv \exp(Ct),$$

其中 $(Ct)^0$ 表示单位阵. 因为 $P'(0) = Q$，所以猜测应当有 $C = Q$ 和

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(Qt)^k \equiv \exp(Qt). \tag{2.1}$$

如果马氏链 $\{X(t)\}$ 的状态空间 I 是有限集合，则称 $\{X(t)\}$ 是有限状态马氏链. 设状态空间 I 有 n 个状态，取

$$q = \max_{i,j\in I} |q_{ij}| = \max_{i\in I} q_i,$$

则矩阵 $(Qt)^k$ 的元素绝对值都小于 $n^{k-1}(qt)^k$. 于是

$$\exp(Qt) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(Qt)^k$$

的每个元收敛，关于 t 逐项求导得到

$$\begin{aligned}(\exp(Qt))' &= (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(Qt)^k)' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}(Qt)^{k-1}Q \\ &= \exp(Qt)Q,\ \ t \in (-\infty, \infty).\end{aligned}$$

定理 2.1

有限状态连续时间马氏链转移概率矩阵 $P(t)$ 由转移概率矩阵 Q 唯一决定，并且有

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Qt)^k\equiv\exp(Qt),t\geq 0.$$

证明.

由方程 (2.1) 我们知 $P(t) = \exp(Qt)$ 满足 $P'(t) = \exp(Qt)Q = P(t)Q$，所以是向前方程的解. 下面证明它是向前方程的唯一解.
如果 $P(t)$ 满足向前方程 $P'(t) = P(t)Q$，且 $P(0)$ 是单位阵，我们证明 $P(t) = \exp(Qt)$. 利用公式

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

和向前方程我们有

$$\begin{aligned}(P(t)\exp(-Qt))' &= P'(t)\exp(-Qt) - P(t)Q\exp(-Qt) \\ &= (P'(t) - P(t)Q)\exp(-Qt) = 0.\end{aligned}$$

这说明 $P(t)\exp(-Qt) = C$ 是常数矩阵. 再由 $P(0) =$ 单位矩阵 我们有

$$\text{单位阵} = P(t)\exp(-Qt).$$

证明.

两边右乘 $\exp(Qt)$，得到

$$
\begin{aligned}
\exp(Qt) &= P(t)\exp(-Qt)\exp(Qt) \\
&= P(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-Qt)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(Qt)^j \\
&= P(t)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{k!(j-k)!}t^k(-t)^{j-k}Q^j \\
&= P(t)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(\sum_{k=0}^{j}C_j^k t^k(-t)^{j-k})Q^j \\
&= P(t)\sum_{j=0}^{\infty}j!(t-t)^jQ^j \\
&= P(t).
\end{aligned}
$$

这就证明了向前方程有唯一解

$$P(t) = \exp(Qt).$$

Q 唯一决定了 $P(t)$. $\square$

例 2.2

给定连续时间马氏链的转移速率矩阵

$$Q = P'(0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 6 & -12 & 6 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

计算转移概率矩阵.

证明.

我们先将 Q 写成若当标准型
$$Q = MDM^{-1},$$
其中 D 为 Q 的若当标准型，M 为可逆矩阵，用线性代数的方法我们可以求得:
$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; M^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
这样得到 $Q^k = MD^kM^{-1}$，于是得到
$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(Qt)^k = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(Qt)^k M^{-1} \\ &= M \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} M^{-1} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+3e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 2-2e^{-3t} \\ 2-2e^{-3t} & 1+4e^{-3t} & 2-2e^{-3t} \\ 2-2e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 2+3e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
$\square$

定理 2.3

马氏链的转移概率 $p_{ij}(t)$ 满足柯尔莫哥洛夫向前和向后方程，而且是向后或向前方程的唯一解.