

第 26 讲 连续时间马氏链的结构

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

对于任意 $t \geq 0$, 若已知 t 时存活的生物个体在 $(t, t+h]$ 内发生分裂的概率是 $\lambda h + o(h)$, 则这个生物的寿命 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. 实际上, 引入生存函数 $\bar{F}(t) = P(T > t)$, 根据题意得到

$$\begin{aligned} P(t < T \leq t+h | T > t) &= \frac{P(t < T \leq t+h)}{P(T > t)} \\ &= \frac{\bar{F}(t) - \bar{F}(t+h)}{\bar{F}(t)} = \lambda h + o(h). \end{aligned}$$

将上式的 t 换成 $t-h$, 得到

$$\frac{\bar{F}(t-h) - \bar{F}(t)}{\bar{F}(t-h)} = \lambda h + o(h), \quad t > 0.$$

对上面两公式的左右两边同时除以 h , 再令 $h \downarrow 0$, 得到

$$\frac{d}{dt} \ln \bar{F}(t) = \frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} = -\lambda.$$

积分后得到 $\ln \bar{F}(t) = -\lambda t$. 于是 $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ 成立. 这说明 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

对于任意 $t \geq 0$, 如果 t 时有 m 个生物, 第 i 个生物在 $(t, t+h]$ 内分裂的概率是 $\lambda_i h + o(h)$, 用 T_i 表示从 t 开始等待第 i 个生物分裂的时间, 我们有 $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$, $T_1, T_2, \dots, T_m$ 相互独立. 我们知从 t 开始等待第一个分裂的时间 $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_m) \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)$.

例 1.1

一个 t 时存活的生物个体在 $(t, t + h]$ 内分裂情况与其在 t 时的年龄无关, 且满足: 当 $h \rightarrow 0$ 时,

- (1) 在 $(t, t + h]$ 内死亡的概率为 $\mu h + o(h)$;
- (2) 在 $(t, t + h]$ 内不死亡也不分裂的概率为 $1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$;
- (3) 在 $(t, t + h]$ 内分裂一次成为两个个体的概率为 $\lambda h + o(h)$.

该生物的后代也按照相同的方式相互独立地分裂自己的后代. 用 $X(t)$ 表示 t 时生物的总数, 称随机过程 $\{X(t)\}$ 为 线性生灭过程, 称 μ 为生物个体的死亡强度, λ 为生物个体的出生强度.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

首先注意到注意对生物个体而言, 除情况 (1), (2), (3) 外, 在 $(t, t+h]$ 中发生其他分裂情况的概率是 $o(h)$. 从前面的分析和条件 (2) 知道 $\{X(t)\}$ 在状态 i 的停留时间服从参数为 $i(\lambda + \mu)$ 的指数分布.

已知 $X(t) = i$ 时, 由指数分布的无记忆性知道这 i 个生物相互独立地分裂自己的后代, 并与 t 时各自的年龄无关, 从而与时间 t 之前这 i 个生物是如何演变来的无关. 所以 $\{X(t)\}$ 是马氏链, 状态空间 $I = \{0, 1, \dots\}$.

对于 $h > 0$, 一个生物在时间区间 $(t, t + h)$ 内分裂成两次或更多次的概率是 $o(h)$, 它等于 1 减去 (1), (2) 和 (3) 中所列出的所有概率. 于是有

$$p_{00}(h) = 1 \text{ (生物不能凭空产生)}$$

$$p_{10}(h) = \mu h + o(h),$$

$$p_{11}(h) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h),$$

$$p_{12}(h) = \lambda h + o(h),$$

$$p_{1j}(h) = o(h), \quad j > 2.$$

对于 $i > 1$, 因为个体们相互独立地分裂自己的后代, 所以按二项分布的想法计算出

$$p_{ii-1}(h) = C_i^1 p_{10}(h) (p_{11}(h))^{i-1} + o(h) = i\mu h + o(h),$$

$$p_{ii}(h) = (p_{11}(h))^i + o(h) = 1 - i(\lambda + \mu)h + o(h).$$

$$p_{ii+1}(h) = C_i^1 p_{12}(h) (p_{11}(h))^{i-1} + o(h) = i\lambda h + o(h),$$

$$p_{ij}(h) = o(h), \text{ 当 } |j - i| \geq 2.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

根据 $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ 计算出

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda + \mu) & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda + \mu) & 3\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

因为 Q 的各行之和为 0, Q 是保守的. 称为线性生灭过程的原因是 $q_i = i(\lambda + \mu)$ 为 i 的线性函数.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

$q_{00} = 0$ 说明 0 是吸引状态, 故 $k_{00} = 1$. 我们可以算出嵌入链的一步转移矩阵

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

我们知嵌入链 $\{X_n\}$ 是 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ 中的有吸收壁 0 的简单随机游动, 质点每次向右移动的概率为 p , 向左移动一步的概率是 $q = 1 - p$. 嵌入链的状态 $\{1, 2, \dots\}$ 是互通的, 但不是常返的, 说明生物总数或者发展到无穷, 或者最终消亡. 生物个体的寿命是来自指数总体 $\epsilon(\lambda + \mu)$ 的随机变量.

对于线性生灭过程 $\{X(t)\}$ 来讲, 已知 $X(t) = k$ 时, 用 τ_i 表示第 i 个个体的剩余寿命, 则需要等待时间

$$T_k = \min\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\}$$

才能再增加或减少一个个体. 因为 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ 相互独立, 都服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda + \mu)$, 所以 $T_k \sim \mathcal{E}(k(\lambda + \mu))$. 数学期望 $E[T_k] = 1/[k(\lambda + \mu)]$ 为马氏链在状态 k 的平均停留时间. k 越大, 平均等待时间越短.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

对于 $j_0 > 0$ 和嵌入链的轨迹 $j_0 \rightarrow j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \cdots$, $j_i > 0$, 因为每次最多增加一个个体, 所以有

$$j_i \leq j_0 + i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots.$$

马氏链在 j_i 的平均停留时间

$$E[T_{j_k}] = \frac{1}{j_i(\lambda + \mu)} \geq \frac{1}{(j_0 + i)(\lambda + \mu)}.$$

对于嵌入链的上述轨迹, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[T_{j_k}] \geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{(j_0 + i)(\lambda + \mu)} = \infty.$$

于是我们知要保证线性生灭过程走完上述轨迹, 需要无穷长的时间. 所以在任何有限的时间内线性生灭过程不会“爆炸”, 即线性生灭过程是规则的.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

进一步的研究还可以得到一下结果：

$$p_{10}(t) = \begin{cases} \frac{\mu - \mu e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}} & \lambda \neq \mu, \\ \frac{\lambda t}{1 + \lambda t}, & \lambda = \mu. \end{cases}$$

于是得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = 0 | X(0) = 1) = \begin{cases} \mu/\lambda, & \lambda > \mu, \\ 1, & \lambda \leq \mu. \end{cases}$$

在条件 $X(0) = 1$ 下, 还可以计算出

$$E[X(t)] = e^{(\lambda-\mu)t},$$

$$\text{Var}(X(t)) = \begin{cases} \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t} (e^{(\lambda-\mu)t} - 1), & \lambda \neq \mu, \\ 2\lambda t, & \lambda = \mu. \end{cases}$$

于是得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X(t)] = \begin{cases} 0, & \lambda < \mu, \\ 1, & \lambda = \mu, \\ \infty, & \lambda > \mu; \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(X(t)) = \begin{cases} 0, & \lambda < \mu, \\ \infty, & \lambda \geq \mu. \end{cases}$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

例 1.2

在生灭过程中, 如果 $\mu = 0$, 生物就不会死亡, 转移速率矩阵就简化成

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

这时的马氏链称为线性纯生过程.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

对于线性纯生过程而言, 生物的生命是来自总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量. 每个生物在寿终称两个新的生物, 新生物按照上一代的方式再独立地分裂各自的后代. 容易计算出线性纯生过程的嵌入链有一步转移概率

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } j = i = 0 \text{ 或 } j = i + 1 \geq 2 \text{ 时,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对于线性纯生过程, 用 T_i 表示已知有 i 个生物的条件下, 等待下一次分裂的时间, 则 $T_i \sim \mathcal{E}(i\lambda)$, $T_1, T_2, \dots$ 相互独立. 在条件 $X(0) = 1$ 下, 引入

$$S_0 = 0, S_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k, k \geq 1.$$

S_k 表示第 k 次分裂的时间. 下面推导公式

$$P(S_k \leq t | X(0) = 1) = (1 - e^{-\lambda t})^k, k \geq 1.$$

我们用归纳法. 引入条件概率 $P_1(\cdot) = P(\cdot | X(0) = 1)$. 当 $k = 1$ 时, 我们有

$$P_1(S_1 \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

设结论对于 $k-1$ 成立, 则有

$$\begin{aligned}
 P_1(S_k \leq t) &= P(S_{k-1} + T_k \leq t) \\
 &= \int_0^t P_1(S_{k-1} + s \leq t | T_k = s) dP_1(T_k \leq s) \\
 &= \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-s)})^{k-1} \lambda k e^{-\lambda k s} ds \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j (-1)^j \int_0^t e^{-\lambda j(t-s)} \lambda k e^{-\lambda k s} ds \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j (-1)^j (e^{-\lambda j t} - e^{-\lambda k t}) \\
 &= (1 - e^{-\lambda t})^k.
 \end{aligned}$$

于是得证.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

这样可以得到线性纯生过程的一步转移概率

$$\begin{aligned} p_{1j}(t) &= P_1(X(t) = j) = P_1(S_{j-1} \leq t < S_j) \\ &= P_1(S_{j-1} \leq t) - P_1(S_j \leq t) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} - (1 - e^{-\lambda t})^j \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} e^{-\lambda t} \\ &= \beta^{j-1} \alpha, \quad j \geq 1, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = e^{-\lambda t}$, $\beta = 1 - \alpha$. 于是在条件 $X(0) = 1$ 下, 对于固定的 $t > 0$, $x(t)$ 服从参数为 $\alpha = e^{-\lambda t}$ 的几何分布, 有数学期望

$$E[X(t)|X(0) = 1] = 1/\alpha = e^{\lambda t}.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

当一开始有 i 个生物个体时, 用 Y_k 表示第 k 个个体在 t 时的后代数, 则 $Y_1, Y_2, \dots, Y_i$ 独立同分布, 都服从相同的几何分布

$$P(Y_k = j) = P_{1j}(t) = \beta^{j-1}\alpha, \quad j \geq 1.$$

于是 t 时的生物总数 $x(t) = \sum_{k=1}^i Y_i$ 服从负二项分布:

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i) = C_{j-1}^{i-1} \beta^{j-1} \alpha^i, \quad j \geq i \geq 1.$$

在条件 $X(0) = i$ 下, $X(t)$ 有数学期望 $E[X(t) | X(0) = i] = ie^{\lambda t}$.
线性纯生过程又称为 尤尔过程.

例 1.3

设 $\{\lambda_i | i \geq 0\}$, $\{\mu_i | i \geq 1\}$ 是非负数列, 满足 $\lambda_i + \mu_i > 0$. 如果马氏链 $\{X(t)\}$ 有状态空间 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ 和转移速率矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

则称 $\{X(t)\}$ 是生灭过程, λ_i 为出生率, μ_i 是死亡率. 这时嵌入链 $\{X_n\}$ 有一步转移概率矩阵

$$K = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中 $p_0 = 1 - q_0$,

$$q_0 = \begin{cases} 1, & \lambda_0 = 0, \\ 0, & \lambda_0 > 0, \end{cases} \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad q_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad i \geq 1.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

嵌入链是非负整数中的随机游动，嵌入链每次向右或向左移动一步.

生灭过程描述如下：已知 t 时有 $i \geq 1$ 个生物时，再等待时间 T_i 后，以概率 p_i 增加一个生物，或以概率 q_i 减少一个生物. 这里 $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i + \mu_i)$.

例 2.1

m 个同种生物中有若干个体带菌, 所有个体的行为独立. 在长为 h 的时间中, 任何两个个体相遇的概率为 $\lambda h + o(h)$. 不带菌者遇到带菌者即被传染, 被传染的个体将永远带菌, 并以相同的方式传染其他不带菌的个体. 当 $t = 0$ 时有 i 个带菌者, 计算

- (1) 在时间 $(0, h]$ 内新增加一个带菌者的概率;
- (2) 在时间 $(0, h]$ 内无新增带菌者的概率;
- (3) 如果从 $t = 0$ 开始, 等待时间 T_i 后新增加一个带菌者, 求 T_i 的分布和数学期望;
- (4) 如果 $t = 0$ 时只有一个带菌者, 平均等待多长时间可以使整个群体带菌?

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

证明.

用 $P_i(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot | X(0) = i)$.

- (1) 对 $k = 1, 2, \dots, i, j = 1, 2, \dots, m - i$, 用 A_{kj} 表示时间 $(0, h]$ 内第 k 个带菌者传染了第 j 个不带菌者. 根据题意, $\{A_{kj}\}$ 相互独立, $P(A_{kj}) = \lambda h + o(h)$. $(0, h]$ 内新增加一个带菌者等价于恰有一个 A_{kj} 发生. 因为一共有 $i(m - i)$ 个 A_{kj} , 所以

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(h) &= P_i(\text{恰有一个 } A_{kj} \text{ 发生}) \\ &= C_{i(m-i)}^1 P(A_{11}) [1 - P(A_{11})]^{i(m-1)-1} \\ &= i(m-1)(\lambda h + o(h))(1 - \lambda h + o(h))^{i(m-1)-1} \\ &= i(m-1)\lambda h + o(h). \end{aligned}$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

证明.

(2) 根据上面的符号, 要计算的概率是

$$\begin{aligned}
 p_{ii}(h) &= P_i(\text{所有 } A_{kj} \text{ 没发生}) \\
 &= (1 - P(A_{11}))^{i(m-i)} \\
 &= (1 - \lambda h + o(h))^{i(m-i)} \\
 &= 1 - i(m-i)\lambda h + o(h).
 \end{aligned}$$

证明.

(3) 用 $X(t)$ 表示 t 时带菌者的总数. 因为带菌者的行为独立, 等待传染下一个个体的时间具有无记忆性, 所以 $\{X(t)\}$ 是马氏链. 对于 $j \geq i+2$, 有

$$\begin{aligned} p_{ij}(h) &\leq \sum_{k=i+2}^m p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h) - p_{i,i+1}(h) \\ &= 1 - [1 - i(m-i)\lambda h + o(h)] - [i(m-i)\lambda h + o(h)] \\ &= o(h). \end{aligned}$$

由此得到

$$p_{ij}(h) = \begin{cases} 1 - i(m-i)\lambda h + o(h), & j = i, \\ i(m-i)\lambda h + o(h), & j = i+1, \\ o(h), & j \geq i+2. \end{cases}$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

证明.

于是得到马氏链的转移速率

$$q_{ij} = p'_{ij}(0) = \begin{cases} -i(m-i)\lambda, & j = i, \\ i(m-i)\lambda, & j = i+1 > 1, \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

根据马氏链的运动规律知道 T_i 服从参数为 $q_i = |q_{ii}|$ 的指数分布, 有数学期望

$$E[T_i] = \frac{1}{q_i} = \frac{1}{i(m-i)\lambda}, \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

证明.

- (4) 马氏链 $\{X(t)\}$ 是一个状态空间为 $I = \{0, 1, \dots, m\}$ 的纯生过程, 从 1 出发到 m 所用的时间为 $T = \sum_{i=1}^{m-1} T_i$, 其数学期望是

$$\begin{aligned}
 ET &= \sum_{i=1}^{m-1} ET_i \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i(m-i)} \\
 &= \frac{1}{m\lambda} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{m-i} \right) \\
 &= \frac{2}{m\lambda} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i}.
 \end{aligned}$$

对于较大的群体, 用近似公式 $\sum_{i=1}^{m-1} i^{-1} \approx \ln(m-1)$, 得到 $ET \approx \frac{2 \ln(m-1)}{m\lambda}$.

注意, $\frac{2 \ln(m-1)}{m\lambda}$ 是 m 的减函数, 这说明群体越密集, 传染速度越快. 另外, 容易验证 $q_i = i(m-i)\lambda$ 在 $i = [m/2]$ 大于最大, 说明有 $[m/2]$ 个带菌者时的传染速率最大, 其中 $[m/2]$ 是 $m/2$ 的整数部分.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

定义 3.1

设 I 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态.

- (1) 如果存在 $t > 0$ 使得 $p_{ij}(t) > 0$, 则称 i 通 j , 记做 $i \rightarrow j$;
- (2) 如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$, 则称 i, j 互通, 记做 $i \leftrightarrow j$;
- (3) 如果 I 的所有状态互通, 则称 马氏链 $\{X(t)\}$ 互通.

命题 3.2

$$i \leftrightarrow i.$$

命题 3.3

如果 $i \rightarrow j$, 那么 $j \rightarrow i$.

命题 3.4

如果 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow k$, 则 $i \rightarrow k$.

所以互通关系是一个等价关系. 于是可以把互通的状态放在一起构成等价类.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

定理 3.5

如果 $\{X(t)\}$ 是互通马氏链, 记 $\mu_j = 1/q_j$, 则有

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{\mu_j}{E[T_{jj}]},$$

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[0, t] \text{ 内马氏链处于 } i \text{ 的时间}}{t}.$$

如果上面定理中的 $\{p_j\}$ 之和为 1, 则称 $\{p_j\}$ 是马氏链的 极限分布.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

定义 4.1

对于任何 $h > 0$, 称 $\{X(nh)\} = \{X(nh) | n = 0, 1, 2, \dots\}$ 为马氏链 $\{X(t)\}$ 的一个离散骨架 或 h 骨架.

命题 4.2

以下的三个命题等价：

- (1) $i \rightarrow j$;
- (2) 对于某个 h 骨架 $i \rightarrow j$;
- (3) 对于任何离散骨架 $i \rightarrow j$.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

对于选定的 h 骨架来讲, i 是正常返状态的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh) = \infty.$$

由于所有的状态非周期, 所以 i 是正常返状态的充分必要条件是

$$\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}(nh) > 0.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

命题 4.4

如果 i 是某个 h 骨架的正常返状态, 则它是所有离散骨架的正常返状态.

定义 4.5

对于马氏链 $\{X(t)\}$, 当 i 是某 h 骨架的常返状态时, 称 i 是 $\{X(t)\}$ 的常返状态; 当 i 是某 h 骨架的非常返状态时, 称 i 是 $\{X(t)\}$ 的非常返状态; 当 i 是某 h 骨架的正常返状态时, 称 i 是 $\{X(t)\}$ 的正常返状态; 当 i 是某 h 骨架的零常返状态时, 称 i 是 $\{X(t)\}$ 的零常返状态.

定义 5.1

设 $P(t)$ 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵, 如果概率分布列 $p = [p_0, p_1, \dots]$ 满足方程组

$$p_j = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t), \quad j \in I, \text{ 或等价地 } p = pP(t), \quad t \geq 0,$$

则称 p 是 $\{X(t)\}$ 的平稳分布或平稳不变分布.

对于互通马氏链, 我们知平稳不变分布就是极限分布:

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t), \quad j \in I.$$

命题 5.2

如果马氏链 $\{X(t)\}$ 以平稳分布 p 为初始分布, $P(X(0) = i) = p_i, i \in I$, 则

- (1) $X(t)$ 和 $X(0)$ 同分布;
- (2) $\{X(t)\}$ 是严平稳过程.

定理 5.3

设互通马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移速率矩阵 Q , 则

- (1) $\{X(t)\}$ 正常返当且仅当 $\{X(t)\}$ 有唯一的平稳不变分布;
- (2) $\{X(t)\}$ 正常返当且仅当对某个 j , $p_j = \lim_{i \rightarrow \infty} p_{ij}(t) > 0$. 当条件成立时, 所有的 $p_j = \lim_{i \rightarrow \infty} p_{ij}(t) > 0$, 且构成平稳不变分布;
- (3) $\{X(t)\}$ 正常返的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases} \sum_{i \in I} p_i q_{ij} = 0, \\ \sum_{j \in I} p_j = 1, \end{cases} \quad \text{或等价地} \quad \begin{cases} pQ = 0, \\ \sum_{j \in I} p_j = 1 \end{cases}$$

有唯一非负解 p . 这时 p 是 $\{X(t)\}$ 的唯一平稳不变分布;

- (4) 当 $\{X(t)\}$ 常返时, $\sum_{i \in I} p_i q_{ij} = 0$ 有非负非零解, 且任何两个解只差一个常数因子.
- (5) 若嵌入链有平稳不变分布 $\pi = [\pi_0, \pi_1, \dots]$, 则

$$p_j \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{\pi_j / q_j}{\sum_{i \in I} \pi_i / q_i}, \quad j \in I.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

命题 5.4

设正常返的马氏链 $\{X(t)\}$ 是平稳过程, 马氏链 $\{Y(t)\}$ 的转移矩阵和 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵相同, 则对任意 $m \geq 1$, $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y(t_0 + s) = i_0, Y(t_1 + s) = i_1, \cdots, Y(t_m + s) = i_m) \\ &= P(X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \cdots, X(t_m) = i_m). \end{aligned}$$

命题 5.5

对于一个生灭过程, 它为非常返的当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} < \infty.$$

它是正常返的当且仅当

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} < \infty.$$

其中 $n = 0$ 时的项默认为 1. 这时平稳不变分布为

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} q^{-1}.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

例 5.6

内科诊室只有一个医生, 医生为每个病人的看病时间是来自指数总体 $\mathcal{E}(\mu)$ 的随机变量. 如果病人按照强度为 λ 的泊松流到达和排队等候, 用马氏链描述诊室的总人数 (指正看病的人数 + 排队人数). 在稳定状态下,

- (1) 计算平均队长;
- (2) 计算病人的平均排队时间;
- (3) 计算医生的可用度 (指稳定状态下医生在工作的概率).

解.

用 $X(t)$ 表示 t 时诊室的总人数. 已知 $x(t) = i > 0$ 时, 用 S 表示等待新到一人所需的时间, 用 T 表示离开一人所需的时间, 则 S, T 独立, $S \sim \mathcal{E}(\lambda), T \sim \mathcal{E}(\mu)$. $\{X(t)\}$ 在 i 的停留时间为

$$\min\{S, T\} \sim \mathcal{E}(\lambda + \mu),$$

然后分别以概率

$$k_{i,i+1} = P(S < T) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad k_{i,i-1} = P(T < S) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

转向 $i+1, i-1$. 根据马氏链的结构知道 $\{X(t)\}$ 是马氏链, 且是生灭过程. 利用公式 $q_{ij} = k_{ij}q_i (i \neq j)$ 得到转移速率

$$q_{00} = -\lambda, \quad q_{ii} = -(\lambda + \mu), \quad i > 0; \quad q_{i,i+1} = \lambda, \quad q_{i,i-1} = \mu.$$

解方程组得到

$$p_k = (1 - \frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^k \equiv pq^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

于是知道只有当 $\lambda < \mu$ 时, 马氏链是正常返的, 有如上的平稳分布, 在稳定状态下的平均队长是

$$EX(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = pq \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{q}{p} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad \lambda < \mu.$$

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布

解.

因为诊室的人数为 $X(t)$, 所以 t 时到达的人需要排队的时间为

$$\sum_{k=1}^{X(t)} \tau_k, \quad \tau_k \sim \mathcal{E}(\mu).$$

其中 τ_k 是第 k 个人的看病时间. 因为 $X(t)$ 与 $\{\tau_i\}$ 独立, 由瓦尔德定理我们有平均排队时间为

$$E\left[\sum_{k=1}^{X(t)} \tau_k\right] = E[X(t)]E[\tau_1] = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}, \quad \lambda < \mu.$$

医生的可用度为

$$1 - p_0 = \lambda/\mu.$$



生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

 $p_{ij}(t)$ 的极限马氏链的 h 骨架和
状态分类

平稳不变分布