第 1 讲 熵

熵
联合熵与条件熵
相对熵与互信息
熵与互信息之间的关系
熵，相对熵与互信息的链式法则

参考资料

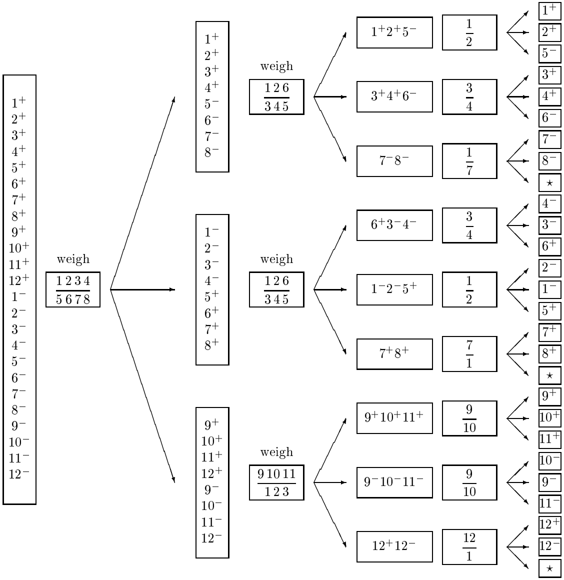
- T. M. Cover and J. A. Thomas, Elements of Information Theory, 2.1-2.5.
- R. W. Yeung, Information and Network Coding, 2.2-2.4.
- F. Alajaji, P. Chen, An Introduction to Single-User Information Theory, 2.1-2.3.
- Y. Polyanskiy, Y. Wu, Information Theory: from Coding to Learning, 1.1, 2.1, 3.1.

引子

课本 P25 习题 2.7

- 假定有 n 枚硬币，可能有一枚或者没有假币.
- 如果是假币，那么它的重量要么重于其它的硬币，要么轻于其它的硬币.
- 我们有一个没有砝码的天平，希望借助它能够找出假币.

12 枚硬币的情形


1+ 2+ 3+ 4+ 5+ 6+ 7+ 8+ 9+ 10+ 11+ 12+ 1− 2− 3− 4− 5− 6− 7− 8− 9− 10− 11− 12−
weigh
1 2 3 4 / 5 6 7 8
1+ 2+ 3+ 4+ 5− 6− 7− 8−
1− 2− 3− 4− 5+ 6+ 7+ 8+
9+ 10+ 11+ 12+ 9− 10− 11− 12−
weigh
1 2 6 / 3 4 5
weigh
1 2 6 / 3 4 5
weigh
9 10 11 / 1 2 3
1+2+5−
3+4+6−
7−8−
6+3−4−
1−2−5+
7+8+
9+10+11+
9−10−11−
12+12−
1 / 2
3 / 4
1 / 7
3 / 4
1 / 2
7 / 1
9 / 10
9 / 10
12 / 1
1+ 2+ 5− 3+ 4+ 6− 7− 8− ⋆ 4− 3− 6+ 2− 1− 5+ 7+ 8+ ⋆ 9+ 10+ 11+ 10− 9− 11− 12+ 12− ⋆

熵

熵

- 熵是随机变量不确定度的度量.
- 设 X 是一个离散型的随机变量，其字母表 (即概率论中的取值空间) 为 $\mathcal{X}$，概率密度函数 $p(x) = \Pr(X = x)$，$x \in \mathcal{X}$.
- 为方便起见，记概率密度函数为 $p(x)$ 以代替 $p_X(x)$.
- 由此，$p(x)$ 和 $p(y)$ 指两个不同的随机变量，实际上分别表示两个不同的概率密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$.

熵

定义 1.1

一个离散型随机变量 X 的**熵** $H(X)$ 定义为

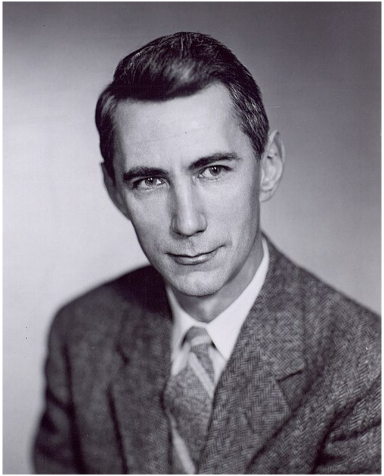
$$H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x).$$

有时也将上面的量记为 $H(p)$. 其中对数的底是 2，熵的单位用比特表示. 由于当 $x \to 0$ 时，$x \log x \to 0$，今后我们约定 $0 \log 0 = 0$.

- 熵 (entropy) 一词源自于希腊语中的 entropia, 其意思为转折点, 变化. 熵的概念是由德国物理学家克劳修斯于 1865 年所提出.
- 物理学家玻尔兹曼于 1870 年将熵的概念引入统计力学.
- 1923 年, 德国科学家普朗克来中国讲学. 讲学时用到 "entropy" 一词, 胡刚复先生在翻译时灵机一动, 把 "商" 字加火旁来意译此词, 创造了 "熵" 字.
- 胡刚复先生说, 此名词的物理含意深奥须多字翻译, 又不合汉字规范, 于是他建议译成一个汉字 "熵". 火代表与热学有关, 含义为温度 T 与热量 Q 之商, 熵读如商.
- 在 1948 年, 克劳德·艾尔伍德·香农将热力学的熵, 引入到信息论, 因此它又被称为香农熵 (Shannon entropy).

克劳德·艾尔伍德·香农（英语：Claude Elwood Shannon, 1916 年 4 月 30 日—2001 年 2 月 24 日）．美国数学家、电子工程师和密码学家。香农 1936 年于密歇根大学获学士学位, 1940 年于麻省理工学院获得博士学位. 其在 1948 年发表了划时代的论文——《通信的数学理论》，这篇论文奠定了现代信息论的基础. 香农还被认为是数字计算机理论和数字电路设计理论的创始人.

推荐读物: Jimmy Soni and Rob Goodman, A Mind at Play: How Claude Shannon Invented the Information Age, Simon and Schuster, 2017. (有中译本, 香农传, 中信出版社, 2019.)



- 如果使用底为 b 的对数，则相应的熵记为 $H_b(X)$. 当对数底为 e 时，熵的单位用**奈特** (nat) 表示.
- 如无特别声明，一般选取对数底为 2.
- 注意，熵实际上是随机变量 X 的分布的泛函，并不依赖于 X 的实际取值，而仅依赖于其概率分布.
- 用 E 表示数学期望. 如果 $X \sim p(x)$，则随机变量 $g(X)$ 的期望值可以表示为
$$E_p g(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) p(x).$$
- 特别地，当 $g(X) = \log \frac{1}{\log p(X)}$ 时，$E_p g(X)$ 就是 X 的熵.

引理 1.2

$H(X) \geq 0.$

证明.
由 $0 \leq p(x) \leq 1$ 知 $\log\left(\frac{1}{p(x)}\right) \geq 0.$ $\square$

引理 1.3

$$H_b(X) = (\log_b a) H_b(X).$$

证明.

由 $\log_b p = (\log_b a) \log_a p$ 即可得到. $\square$

例 1.4

设

$$X = \begin{cases} 1 & \text{概率为 } p \\ 0 & \text{概率为 } 1-p. \end{cases}$$

于是

$$H(X) = -p\log p - (1-p)\log(1-p) =: H(p).$$

例 1.5

设

$$X = \begin{cases} a & \text{概率为}\,\frac{1}{2} \\ b & \text{概率为}\,\frac{1}{4} \\ c & \text{概率为}\,\frac{1}{8} \\ d & \text{概率为}\,\frac{1}{8}. \end{cases}$$

则 X 的熵为

$$H(X) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} = \frac{7}{4}\text{比特}.$$

下面例子说明随机变量的熵可以是无穷的.

例 1.6: 课本习题 2.19

设 $A=\sum_{n=2}^{\infty}(n\log^2 n)^{-1}$. 定义随机变量 X 满足 $\Pr(X=n)=(An\log^2 n)^{-1}$, 其中 $n=2,3,\cdots$, 则 $H(X)=+\infty$.

证明.

由定义, $p_n = \mathrm{Pr}(X = n) = 1/An\log^2 n$, $n \geq 2$. 于是

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -\sum_{n=2}^{\infty} p(n)\log p(n) \\
&= -\sum_{n=2}^{\infty} (1/Sn\log^2 n)\log(1/An\log^2 n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(An\log^2 n)}{An\log^2 n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log A + \log n + 2\log\log n}{An\log^2 n} \\
&= \log A + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{An\log n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\log\log n}{An\log^2 n}.
\end{aligned}
$$

证明.

和式中第一项是有限的. 由于我们考虑对数以 2 为底, 最后一项中每一项均是非负的. 对于中间项, 我们有

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{An\log n} > \int_2^{\infty}\frac{1}{Ax\log x}dx = K\ln\ln 2|_2^{\infty} = +\infty,$$

其中 $K = \frac{ln2}{A}$. 从而我们有 $H(X) = +\infty$. $\square$

熵
联合熵与条件熵
相对熵与互信息
熵与互信息之间的关系
熵，相对熵与互信息的链式法则

定义 2.1

对于服从联合分布为 $p(x,y)$ 的一对离散随机变量 (X,Y)，其**联合熵** $H(X,Y)$ (joint entropy) 定义为

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y)$$

上式亦可表示为

$$H(X,Y) = -E\log p(X,Y).$$

一般地，对于 n 个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$，它们的联合熵定义为

$$H(X^n) = \sum_{x_1}\cdots\sum_{x_n} p(x_1,\cdots,x_n)\log\frac{1}{p(x_1,\cdots,x_n)}$$

定义 2.2

若 $(X,Y) \sim p(x,y)$，条件熵 $H(Y|X)$ 定义为:

$$H(Y|X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) H(Y|X=x)$$

定义 2.3

若 $(X,Y) \sim p(x,y)$，条件熵 $H(Y|X)$ 定义为：

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) H(Y|X=x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) \sum_{y\in\mathcal{Y}} p(y|x) \log p(y|x)
\end{aligned}
$$

定义 2.4

若 $(X,Y)\sim p(x,y)$，条件熵 $H(Y|X)$ 定义为：

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)H(Y|X=x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(y|x)\log p(y|x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(y|x)
\end{aligned}
$$

定义 2.5

若 $(X,Y)\sim p(x,y)$，条件熵 $H(Y|X)$ 定义为：

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)H(Y|X=x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(y|x)\log p(y|x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(y|x) \\
&= -E\log p(Y|X).
\end{aligned}
$$

定理 2.6: 链式法则

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X).$$

证明.

我们有

$$H(X,Y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y)$$

证明.

我们有

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y) \\ &= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log(p(x)p(y|x)) \end{aligned}$$

证明.

我们有

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log(p(x)p(y|x)) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x) - \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(y|x)
\end{aligned}
$$

证明.

我们有

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log(p(x)p(y|x)) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x) - \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(y|x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log p(x) - \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(y|x)
\end{aligned}
$$

证明.

我们有

$$
\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x,y) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log(p(x)p(y|x)) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(x) - \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(y|x) \\
&= -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log p(x) - \sum_{x\in\mathcal{X}}\sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y)\log p(y|x) \\
&= H(X) + H(Y|X).
\end{aligned}
$$

从而得证. $\square$

例 2.7

设 (X,Y) 服从如下的联合分布：

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	0

X 的边际分布为 $(1/2,1/4,1/8,1/8)$，Y 的边际分布为 $(1/4,1/4,1/4,1/4)$，因而 $H(X)=\frac{7}{4}$比特，$H(Y)=2$比特。同样地我们可以求得 $H(X|Y)=\sum_{i=1}^{4}p(Y=i)H(X|Y=i)=\frac{11}{8}$比特，$H(Y|X)=\frac{13}{8}$比特，以及 $H(X,Y)=\frac{27}{8}$比特.

注记 2.8

注意 $H(Y|X) \neq H(X|Y)$，但 $H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$，稍后会用到这个性质.

- 相对熵是两个随机分布之间距离的度量.
- 在统计学中，它对应的是似然比的对数期望.
- 相对熵 $D(p\|q)$ 度量当真实分布为 p 而假定分布为 q 时的无效性.
- 例如，已知随机变量的真实分布为 p，可以构造平均长度为 $H(p)$ 的码.
- 但是，如果使用针对分布 q 的编码，那么在平均意义上就需要 $H(p)+D(p\|q)$ 比特来描述这个随机变量.

定义 3.1

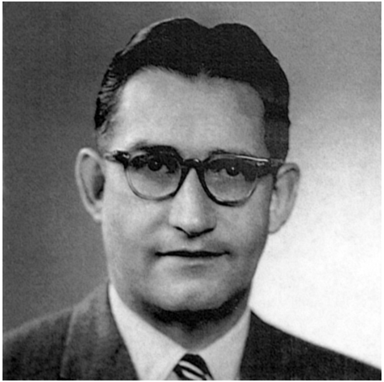
两个概率密度函数为 $p(x)$ 和 $q(x)$ 之间的**相对熵**或 Kullback-Leibler **距离**定义为

$$D(p \parallel q) = \sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} = E_p \log\frac{p(x)}{q(x)}. \tag{3.1}$$

在上述定义中，我们采用约定 $0\log\frac{0}{0}=0$，约定 $0\log\frac{0}{q}=0$，$p\log\frac{p}{0}=\infty$(基于连续性). 因此，若存在字符 $x\in\mathcal{X}$ 使得 $p(x)>0$，$q(x)=0$，则有 $D(p\|q)=\infty$.

所罗门·库尔巴克（Solomon Kullback，1907 年 4 月 3 日 - 1994 年 8 月 5 日）是一位美国密码学家和数学家，在信息论和统计学领域做出了重要贡献．他最为人熟知的是与理查德·莱布勒（Richard Leibler）共同提出了库尔巴克-莱布勒散度（Kullback–Leibler divergence，简称 KL 散度）．这一概念在信息论、统计学、机器学习和数据科学中被广泛使用．

理查德·莱布勒（Richard A. Leibler，1914 年 3 月 18 日 - 2003 年 10 月 25 日）是一位美国密码学家和数学家, 在信息论和统计学领域做出了重要贡献. 1962-1977 年, 他是美国国防分析研究所通信研究部的负责人.



- 稍后我们将证明相对熵总是非负的, 并且当且仅当 $p = q$ 时其为零.
- 但是，由于相对熵并不对称，也不满足三角不等式, 因此相对熵实际上并非两个分布之间的真正距离.
- 然而, 将相对熵视作分布之间的 “距离” 往往会很有用.

定义 3.2

考虑两个随机变量 X 和 Y，它们的联合概率密度函数为 $p(x,y)$，其边际概率密度函数分别是 $p(x)$ 和 $q(x)$. 互信息 $I(X;Y)$ 为联合分布 $p(x,y)$ 和乘积分布 $p(x)p(y)$ 之间的相对熵，即：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \textstyle\sum_{x\in\mathcal{X}} \sum_{y\in\mathcal{Y}} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\ &= D(p(x,y) \,\|\, p(x)p(y)) \\ &= E_{p(x,y)} \log \frac{p(X,Y)}{p(X)p(Y)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

例 3.3

设 $\mathcal{X} = \{0, 1\}$，考虑 $\mathcal{X}$ 上的两个分布 p 和 q. 设 $p(0) = 1 - r$, $p(1) = r$ 及 $q(0) = 1 - s$, $q(1) = s$，则有

$$D(p\|q) = (1 - r)\log\frac{1 - r}{1 - s} + r\log\frac{r}{s}$$

以及

$$D(q\|p) = (1 - s)\log\frac{1 - s}{1 - r} + r\log\frac{s}{r}.$$

如果 $r = s$，则 $D(p\|q) = D(q\|p) = 0$. 一般地，$D(p\|q) \neq D(q\|p)$. 例如，若 $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{4}$，我们有

$$D(p\|q) = 0.2075\text{比特},\ D(q\|p) = 0.1887\text{比特}.$$

熵

联合熵与条件熵

相对熵与互信息

熵与互信息之间的关系

熵，相对熵与互信息的链式法则

可将互信息 $I(X;Y)$ 重新写为：

$$I(X;Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

可将互信息 $I(X;Y)$ 重新写为：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_{x,y} p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\ &= \sum_{x,y} p(x,y)\log\frac{p(x|y)}{p(x)} \end{aligned}$$

可将互信息 $I(X;Y)$ 重新写为:

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\
&= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} \\
&= -\sum_{x,y} p(x,y) \log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y)
\end{aligned}
$$

可将互信息 $I(X;Y)$ 重新写为：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\ &= \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} \\ &= -\sum_{x,y} p(x,y) \log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y) \\ &= -\sum_{x} p(x) \log p(x) - (-\sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y)) \end{aligned}$$

可将互信息 $I(X;Y)$ 重新写为:

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= \sum_{x,y} p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \\
&= \sum_{x,y} p(x,y)\log\frac{p(x|y)}{p(x)} \\
&= -\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x) + \sum_{x,y} p(x,y)\log p(x|y) \\
&= -\sum_{x} p(x)\log p(x) - (-\sum_{x,y} p(x,y)\log p(x|y)) \\
&= H(X) - H(X|Y)
\end{aligned}
$$

由此知互信息 $I(X;Y)$ 是在给定 Y 知识的条件下 X 的不确定度的缩减量.

对称地，我们亦可以得到

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X),$$

因而，X 含有 Y 的信息量等同于 Y 含有 X 的信息量. 又由定理 2.6，可得

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y).$$

最后，注意到

$$I(X;X) = H(X) - H(X|X) = H(X).$$

因此，随机变量与自身的互信息为该随机变量的熵.

我们将前面关于熵和互信息的关系做一个总结如下.

定理 4.1

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \tag{4.1}$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \tag{4.2}$$

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) \tag{4.3}$$

$$I(X;Y) = I(Y;X) \tag{4.4}$$

$$I(X;X) = H(X) \tag{4.5}$$

定理 5.1: 熵的链式法则

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 服从 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则

$$H(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_{i-1}, \cdots, X_1).$$

证明.

反复应用定理2.6. $\square$

定义 5.2

随机变量 X 和 Y 在给定随机变量 Z 时的条件互信息定义为

$$I(X;Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z) = E_{p(x,y,z)} \log \frac{p(X,Y|Z)}{p(X|Z)p(Y|Z)}$$

$$= \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)p(y|z)}.$$

注意到 $I(X;Y|Z)$ 关于 X 和 Y 对称.

定理 5.3: 互信息的链式法则

$$I(X_1, X_2, \cdots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y | X_{i-1}, X_{i-2}, \cdots, X_1).$$

证明.

$$\begin{aligned} & I(X_1, X_2, \cdots, X_n; Y) \\ = \quad & H(X_1, X_2, \cdots, X_n) - H(X_1, X_2, \cdots, X_n | Y) \end{aligned}$$

定理 5.4: 互信息的链式法则

$$I(X_1, X_2, \cdots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y | X_{i-1}, X_{i-2}, \cdots, X_1).$$

证明.

$$\begin{aligned} & I(X_1, X_2, \cdots, X_n; Y) \\ = & H(X_1, X_2, \cdots, X_n) - H(X_1, X_2, \cdots, X_n | Y) \\ = & \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_{i-1}, \cdots, X_1) - \sum_{i-1}^{n} H(X_i | X_{i-1}, \cdots, X_1, Y) \end{aligned}$$

定理 5.5: 互信息的链式法则

$$I(X_1, X_2, \cdots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y | X_{i-1}, X_{i-2}, \cdots, X_1).$$

证明.

$$\begin{aligned}
& I(X_1, X_2, \cdots, X_n; Y) \\
= \ & H(X_1, X_2, \cdots, X_n) - H(X_1, X_2, \cdots, X_n | Y) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_{i-1}, \cdots, X_1) - \sum_{i-1}^{n} H(X_i | X_{i-1}, \cdots, X_1, Y) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y | X_{i-1}, X_{i-2}, \cdots, X_1). \quad \square
\end{aligned}$$

定义 5.6

对于联合概率密度函数 $p(x,y)$ 和 $q(x,y)$，条件相对熵 $D(p(y|x)\|q(y|x))$ 定义为条件概率密度函数 $p(y|x)$ 和 $q(y|x)$ 之间的平均相对熵，其中取平均是关于概率密度函数 $p(x)$ 而言的. 更确切地，

$$\begin{aligned} D(p(y|x)\|q(y|x)) &= \sum_x p(x) \sum_y p(y|x) \log \frac{p(y|x)}{q(y|x)} \\ &= E_{p(x,y)} \log \frac{p(Y|X)}{q(Y|X)}. \end{aligned}$$

定理 5.7: 相对熵的链式法则

$$D(p(x,y)\|q(x,y)) = D(p(x)\|q(x)) + D(p(y|x)\|q(y|x)).$$

证明.

$$D(p(x,y)\|q(x,y)) = \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

定理 5.8: 相对熵的链式法则

$$D(p(x,y)\|q(x,y)) = D(p(x)\|q(x)) + D(p(y|x)\|q(y|x)).$$

证明.

$$\begin{aligned} D(p(x,y)\|q(x,y)) &= \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{p(x,y)}{q(x,y)} \\ &= \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{p(x)p(y|x)}{q(x)q(y|x)} \end{aligned}$$

定理 5.9: 相对熵的链式法则

$$D(p(x,y)\|q(x,y)) = D(p(x)\|q(x)) + D(p(y|x)\|q(y|x)).$$

证明.

$$\begin{aligned}
D(p(x,y)\|q(x,y)) &= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x)p(y|x)}{q(x)q(y|x)} \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x)}{q(x)} + \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(y|x)}{q(y|x)}
\end{aligned}$$

定理 5.10: 相对熵的链式法则

$$D(p(x,y)\|q(x,y)) = D(p(x)\|q(x)) + D(p(y|x)\|q(y|x)).$$

证明.

$$\begin{aligned}
D(p(x,y)\|q(x,y)) &= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x)p(y|x)}{q(x)q(y|x)} \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x)}{q(x)} + \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(y|x)}{q(y|x)} \\
&= D(p(x)\|q(x)) + D(p(y|x)\|q(y|x)). \quad \square
\end{aligned}$$