第 12 讲 信道编码定理的逆定理，信源信道分离定理

信道编码定理的逆定理

反馈容量

信源信道分离定理

信道编码定理的逆定理

反馈容量

信源信道分离定理

- 我们现在计划将上面关于零误差码的证明推广到非常小的误差概率的情形. 我们要利用到的新工具是我们前面讲到的费诺不等式.
- 在证明之前，我们先来给出一些定义.
- 输入消息 W 均匀分布在集合 $\mathcal{W} = \{1, 2, \cdots, 2^{nR}\}$ 上.
- 对 W 进行编码通过信道我们得到了 Y^n. 由 Y^n 我们得到了一个估计 $\hat{W} = g(Y^n)$. 于是 $W \to X^n(W) \to Y^n \to \hat{W}$ 构成了一个马尔可夫链.
- 注意到误差概率为

$$P\{\hat{W} \neq W\} = \frac{1}{2^{nR}} \sum_i \lambda_i = P_e^{(n)}.$$

引理 1.1: 费诺不等式

设离散无记忆信道的码簿为 $\mathcal{C}$，且输入消息 W 服从 2^{nR} 上的均匀分布，则有

$$H(W|\hat{W}) \leq 1 + P_e^{(n)} nR.$$

引理 1.2

设 Y^n 为 X^n 经过容量 C 离散无记忆信道传输所得到的输出信号. 则对任意的 $p(x^n)$，有

$$I(X^n;Y^n) \le nC.$$

证明.

由离散无记忆信道的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
I(X^n;Y^n) &= H(Y^n) - H(Y^n|X^n) \\
&= H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|Y_1,\cdots,Y_{i-1},X^n) \\
&= H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} H(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\
&= = \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i) \\
&\leq nC.
\end{aligned}
$$

这样我们就证明了多次使用信道并不增加每次传输的信息容量比特. □

下面我们来证明信道编码定理的逆定理.

信道编码定理的逆定理的证明.

我们希望证明若对于信道 C 存在一列满足 $\lambda^{(n)} \to 0$ 的 $(2^{nR}, n)$ 码，则必有 $R \leq C$.

证明.

首先我们注意到当 $\lambda^{(n)} \to 0$ 时，有 $P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{nR}} \sum_i \lambda_i \to 0$. 对于一个固定的编码法则 $X^n(\cdot)$ 和一个固定的解码法则 $\hat{W} = g(Y^n)$，我们有 $W \to X^n(W) \to Y^n \to \hat{W}$. 于是我们有

$$\begin{aligned} nR &= H(W) \\ &= H(W|\hat{W}) + I(W;\hat{W}) \\ &\le 1 + P_e^{(n)} nR + I(W;\hat{W}) \\ &\le 1 + P_e^{(n)} nR + I(X^n;Y^n) (\text{数据处理不等式}) \\ &\le 1 + P_e^{(n)} nR + nC. \end{aligned}$$

上式两边同除以 n，我们有

$$R \le P_e^{(n)} R + \frac{1}{n} + C.$$

证明.

现在令 $n \to \infty$，则不等式右边的前两项趋于 0，因此

$$R \leq C.$$

同时我们也知道

$$P_e^{(n)} \geq 1 - \frac{C}{R} - \frac{1}{nR}.$$

该式表明，当 $R > C$ 时，无论让 n 有多大，误差概率都无法接近于 0. 因此，当码率大于信道容量时，不可能达到任意低的误差概率. □

上述逆定理有时称作信道编码定理的弱逆定理. 也可以证明一个强逆定理，它说明当码率大于容量时，误差概率以级数级趋于 1.

信道编码定理的逆定理

反馈容量

信源信道分离定理

我们定义一个 $(2^{nR}, n)$ 反馈码为一个映射序列 $x_i(W, Y^{i-1})$ 和一个译码函数序列 $\mathcal{Y}^n \to \{1, 2, \cdots, 2^{nR}\}$，其中 x_i 仅与消息 $W \in 2^{nR}$ 和先前接受到的值 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$ 有关. 于是，当 W 服从 $\{1, 2, \cdots, 2^{nR}\}$ 上的均匀分布时，有

$$P_e^{(n)} = P(g(Y^n) \neq W).$$

定义 2.1

离散无记忆信道的带反馈容量C_{FB} 定义为反馈码可以达到的所有码率的上确界.

定理 2.2: 反馈容量

$$C_{FB} = C = \max_{p(x)} I(X;Y).$$

证明.

由于非反馈码是反馈码的特例，不带反馈能够达到的任何码率也可以通过带反馈的方式达到，因此

$$C_{FB} \geq C.$$

证明相反的不等式稍微复杂一些. 我们还是和之前一样，假设 W 服从 $\{1, 2, \cdots, 2^{nR}\}$ 上的均匀分布，则 $P\{W \neq \hat{W}\} = P_e^{(n)}$，根据费诺不等式和数据处理不等式，我们有

$$\begin{aligned} nR = H(W) &= H(W|\hat{W}) + I(W;\hat{W}) \\ &\leq 1 + P_e^{(n)} nR + I(W;\hat{W}) \\ &\leq 1 + P_e^{(n)} nR + I(W;Y^n). \end{aligned}$$

这时由于 x_i 与先前接受到的值 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n-1}$ 有关，我们不能保证 $I(W;Y^n) \leq I(X^n;Y^n)$.

证明.

但是我们可以换另一条路如下：

$$
\begin{aligned}
I(W;Y^n) &= H(Y^n) - H(Y^n|W) \\
&= H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|Y_1, Y_2, \cdots, Y_{i-1}, W) \\
&= H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|Y_1, Y_2, \cdots, Y_{i-1}, W, X_i) \\
&= H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i).
\end{aligned}
$$

上面最后一个等式是因为 $(W, Y^{i-1}) \to X_i \to Y_i$ 构成了一个马尔科夫链. 由离散无记忆信道容量的定义我们有

$$
I(W;Y^n) = H(Y^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i)
$$

证明.
于是我们可得

$$nR \leq P_e^{(n)} nR + 1 + nC$$

上式两边同除以 n 并令 $n \to \infty$，我们有

$$R \leq C.$$

综上，我们知使用反馈并不能给我们更高的码率，即 $C_{FB} = C$. $\square$

可以构造一个有记忆的离散信道的例子，使得反馈可以增加信道容量.

信道编码定理的逆定理

反馈容量

信源信道分离定理

假设有一个信源 V，从字母表 $\mathcal{V}$ 中生成字符. 对于由 V 生成的随机过程，除了要求其取值于有限字母表且满足 AEP 之外，不做任何假设. 这种过程的例子包括独立同分布的随机变量序列和平稳不可约的马尔可夫链的状态序列. 实际上可以证明，任何平稳遍历信源均满足 AEP.

现在想通过信道发送字符序列 $V^n = V_1, V_2, \cdots, V_n$，并且保证接收者可以重构序列. 为了达到这个目的，将序列映射成码字 $X^n(V^n)$，通过信道发送这个码字. 接收者观察接收到的序列 Y^n 后，给出发送序列 V^n 的估计 $\hat{V}^n$. 如果 $V^n \neq \hat{V}^n$，则接收者犯了错误. 我们定义误差概率为

$$P\{V^n \neq \hat{V}^n\} = \sum_{y^n} \sum_{v^n} p(v^n) p(y^n | x^n(v^n)) I(g(y^n) \neq v^n).$$

其中 I 为示性函数，$g(y^n)$ 是译码函数.

定理 3.1

如果 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 为有限字母表上满足 AEP 和 $H(\mathcal{V}) < C$ 的随机过程，则存在一个信源信道编码使得误差概率 $P\{\hat{V}^n \neq V^n) \to 0$. 反之，对任意平稳随机过程，如果 $H(\mathcal{V}) > \mathcal{C}$，那么误差概率远离 0，从而不可能以任意低的误差概率通过信道发送这个过程.

证明.

可达性我们先来证明前半部分. 由于已经假定随机过程满足 AEP，所以必然存在一个元素个数 $\le 2^{n(H(\mathcal{V})+\epsilon)}$ 的典型集 $A_\epsilon^{(n)}$，它占有绝大部分的概率. 我们仅对这个典型集中的信源序列进行编码；其余所有序列将产生一个错误. 它对误差概率的贡献不会超过 ϵ.

给 $A_\epsilon^{(n)}$ 中的所有序列加上下标. 由于至多有 $2^{n(H(\mathcal{V})+\epsilon)}$ 个这样的序列，$n(H(\mathcal{V})+\epsilon)$ 比特足以给出他们的下标了. 如果

$$H(\mathcal{V})+\epsilon = R < C.$$

我们能以小于 ϵ 的误差概率将需要的下标发送给接收者. 接收者可以通过穷举典型集 $A_\epsilon^{(n)}$，选择与被估计下标相应的序列，从而重构出 V^n. 这个序列将以很高的概率与传输序列相一致.

证明.

具体来说，对充分大的 n，我们有

$$
\begin{aligned}
P(V^n \neq \hat{V}^n) &\leq P(V^n \notin A_\epsilon^{(n)}) + P(g(Y^n) \neq V^n | V^n \in A_\epsilon^{(n)}) \\
&= \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.
\end{aligned}
$$

因此，如果

$$H(\mathcal{V}) < C,$$

那么对充分大的 n，我们能够以低的误差概率重构出序列.

证明.

逆定理我们希望证明，对于任意的信源信道编码序列

$$X^n(V^n):\mathcal{V}^n\to\mathcal{X}^n$$

$$g_n(Y^n):\mathcal{Y}^n\to\mathcal{V}^n$$

$P(\hat{V}^n\neq V^n)\to 0$ 蕴含结论 $H(\mathcal{V})\le C$. $X^n(\cdot)$ 是数据序列 V^n 的任意（也许是随机的）码字分配，$g_n(\cdot)$ 是任何译码函数（对于输出序列 Y^n 的估计分配 $\hat{V}^n$）. 根据费诺不等式，必有

$$H(V^n|\hat{V}^n)\le 1+P(\hat{V}^n\neq V^n)\log|\mathcal{V}^n|=1+P(\hat{V}^n\neq V^n)n\log|\mathcal{V}|.$$

证明.

因此，对于这个码，

$$
\begin{aligned}
H(\mathcal{V}) &= \frac{H(V_1, V_2, \cdots, V_n)}{n} \\
&= \frac{H(V^n)}{n} \\
&= \frac{1}{n} H(V^n|\hat{V}^n) + \frac{1}{n} I(V^n; \hat{V}^n) \\
&\leq \frac{1}{n}(1 + P(\hat{V}^n \neq V^n) n \log |\mathcal{V}|) + \frac{1}{n} I(V^n; \hat{V}^n) \ (\text{费诺不等式}) \\
&\leq \frac{1}{n}(1 + P(\hat{V}^n \neq V^n) n \log |\mathcal{V}|) + \frac{1}{n} I(X^n; Y^n) \ (\text{数据处理不等式}) \\
&\leq \frac{1}{n} + P(\hat{V}^n \neq V^n) \log |\mathcal{V}| + C. \ (\text{信道的无记忆性})
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$，我们有 $P(\hat{V}^n \neq V^n) \to 0$，因此

$$H(\mathcal{V}) \leq C.$$