第 15 讲 高斯信道

高斯信道是一个时间离散信道，在时刻 i，输出信号 Y_i 是输入信号 X_i 与噪声 Z_i 之和，其中 Z_i 为独立同分布序列，且均服从方差为 N 的高斯分布．于是，

$$Y_i = X_i + Z_i,\ Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$$

假设噪声 Z_i 与信号 X_i 独立.

对于输入最通常的限制是在能量或者功率方面的约束. 我们一般考虑对平均功率的约束，即对于在信道上传输的任意码字 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，我们要求 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P$.

定义 1.1

功率限制为 P 的高斯信道的信息容量为

$$C = \max_{EX^2 \leq P} I(X;Y).$$

我们来看看如何计算信道容量. 将 $I(X;Y)$ 展开，由于 Z 与 X 相互独立，由微分熵的平移不变性，我们可得

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) \\ &= h(Y) - h(X+Z|X) \\ &= h(Y) - h(Z|X) \\ &= h(Y) - h(Z) \end{aligned}$$

此时，$h(Z) = \frac{1}{2}\log 2\pi e N$. 又由于 X 与 Z 独立以及 $EZ = 0$，所以

$$EY^2 = E(X+Z)^2 = EX^2 + 2EXEZ + EZ^2 = P + N$$

假设给定 $EY^2 = P + N$，则我们知，Y 的熵的上界为 $\frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N)$. 于是

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= h(Y) - h(Z) \\
&\leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N) - \frac{1}{2}\log 2\pi eN \\
&= \frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{N}).
\end{aligned}
$$

因此，高斯信道的信道容量为

$$C = \max_{EX^2\leq P} I(X;Y) = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{N}),$$

并且最大值在 $X \sim \mathcal{N}(0,P)$ 时达到.

一个功率限制为 P 的高斯信道所对应的 (M, n) 码由以下几个要素构成：

1. 下标集 $\{1, 2, 3, \cdots, M\}$.
2. 编码函数 $x : \{1, 2, \cdots, M\} \to \mathcal{X}^n$，其相应的码字为 $x^n(1), x^n(2), \cdots, x^n(M)$，且满足功率限制 P，即

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\omega) \leq nP, \ \omega = 1, 2, \cdots, M.$$

3. 译码函数

$$g : \mathcal{Y}^n \to \{1, 2, \cdots, M\}$$

该编码的码率和误差概率与前面我们离散情形时的定义相同.

定义 1.2

对于一个功率限制为 P 的高斯信道，如果存在一个 $(2^{nR}, n)$ 码，满足功率限制条件，使得最大误差概率 $\lambda^n \to 0$，则称码率 R 关于该功率限制为 P 的高斯信道是可达的.

定理 1.3

一个功率限制为 P 且噪声方差为 N 的高斯信道的容量为

$$C = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{P}{N}) \text{ 比特/传输}$$

它是所有可达码率的上界.

假设有一组并联高斯信道，每个信道的输出是输入与高斯噪声之和. 对于信道 j，

$$Y_j = X_j + Z_j,\ j = 1, 2, \cdots, k,$$

其中

$$Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j).$$

并且我们假设噪声在信道与信道之间是相互独立的. 假定在所使用的总功率方面存在一个公共的功率限制，即，

$$E \sum_{j=1}^{k} X_j^2 \leq P.$$

我们希望将功率分配于各信道之中以使总容量达到最大.

信道的信息容量 C 为

$$C = \max_{f(x_1, x_2, \cdots, x_k): \sum EX_i^2 \le P} I(X_1, X_2, \cdots, X_k; Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$$

注记 2.1

信息容量是所有可达码率的上确界，这一事实的证明与单个高斯信道的容量定理的证明方法相同，故我们略去.

由于 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_k$ 是相互独立的，

$$
\begin{aligned}
& I(X_1, X_2, \cdots, X_k; Y_1, Y_2, \cdots, Y_k) \\
= \;& h(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k) - h(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k | X_1, X_2, \cdots, X_k) \\
= \;& h(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k) - h(Z_1, Z_2, \cdots, Z_k | X_1, X_2, \cdots, X_k) \\
= \;& h(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k) - h(Z_1, Z_2, \cdots, Z_k) \\
= \;& h(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \\
\leq \;& \sum_i (h(Y_i) - h(Z_i)) \\
\leq \;& \sum_i \frac{1}{2} \log(1 + \frac{P_i}{N_i}).
\end{aligned}
$$

其中 $P_i = EX_i^2$, $\sum P_i = P$. 等号在如下条件达到时成立

$$(X_1, X_2, \cdots, X_k) \sim \mathcal{N}(0, P),\ P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k \end{pmatrix}.$$

于是，我们问题就简化为在满足约束条件 $\sum P_i = P$ 下，寻找一个功率分配方法使得容量达到最大，

这是一个标准的优化问题，可以利用拉格朗日乘子法得到解决. 相应的函数为

$$J(P_1,\cdots,P_k)=\sum\frac{1}{2}\log(1+\frac{P_i}{N_i})+\lambda(\sum P_i-P).$$

对 P_i 求导，我们有

$$\frac{1}{2}\frac{1}{P_i+N_i}+\lambda=0,$$

于是

$$P_i=v-N_i.$$

然而，由于 P_i 必须非负，所以，并不能总找到一个如此形式的解.

这样，可利用库恩-塔克条件来验证如下解

$$P_i = (v - N_i)^+$$

是使得容量达到最大的分配方法，其中 v 的选取满足

$$\sum (v - N_i)^+ = P.$$

这里 $(x)^+$ 表示对 x 取正的部分：

$$(x)^+ = \begin{cases} x & \text{若} x \geq 0, \\ 0 & \text{若} x < 0. \end{cases}$$

设 K_Z 为噪声的协方差阵，K_X 为输入信号的协方差阵. 那么，对于输入信号的功率限制可以写为

$$\frac{1}{n}\sum_i EX_i^2 \leq P,$$

或等价地

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}(K_X) \leq P.$$

这里的功率限制依赖于 n，因此，我们不得不对每个 n 单独计算容量.

与独立信道情形相同，我们有

$$I(X_1, X_2, \cdots, X_n; Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) = h(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) - h(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$$

这里 $h(Z_1, \cdots, Z_n)$ 由噪声分布唯一确定，而不依赖于输入信号分布的选择. 所以，计算信道容量等价于将 $h(Y_1, \cdots, Y_n)$ 最大化. 由于输入信号和噪声是相互独立的，所以，输出 Y 的协方差阵为 $K_Y = K_X + K_Z$，这时由我们前面的结果知当 Y 服从正态分布时输出信号的熵达到最大，这时输入分布也是一个正态分布. 我们可以计算得

$$h(Y_1, \cdots, Y_n) = \frac{1}{2} \log((2\pi e)^n |K_X + K_Z|).$$

于是，问题就化为在 K_X 的迹约束条件下，选取 K_X 使得 $|K_X + K_Z|$ 达到最大. 为达此目的，将 K_Z 分解成对角型，

$$K_Z = Q\Lambda Q^t, \text{ 其中} QQ^t = I.$$

那么，

$$
\begin{aligned}
|K_X + K_Z| &= |K_X + Q\Lambda Q^t| \\
&= |Q||Q^t K_X Q + \Lambda||Q^t| \\
&= |Q^t K_X Q + \Lambda| \\
&= |A + \Lambda|,
\end{aligned}
$$

其中 $A = Q^t K_X Q$. 于是我们有，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A) &= \mathrm{tr}(Q^t K_X Q) \\
&= \mathrm{tr}(Q^t Q K_X) \\
&= \mathrm{tr}(K_X).
\end{aligned}
$$

于是问题就简化为在条件 $\mathrm{tr}(A) \leq nP$ 下，求 $|A + \Lambda|$ 的最大值.

我们利用前面讲到的阿达马不等式，此不等式说明任意正定矩阵 K 得行列式一定小于它的对角元素得乘积，即

$$|K| \leq \prod_i K_{ii},$$

等号成立当且仅当 K 为对角阵. 于是，

$$|A + \Lambda| \leq \prod_i (A_{ii} + \lambda_i),$$

当且仅当 A 为对角阵时等号成立.

由于 A 受到迹的约束，

$$\frac{1}{n}\sum_i A_{ii} \le P,$$

且 $A_{ii} \ge 0$，所以 $\prod_i (A_{ii} + \lambda_i)$ 的最大值在

$$A_{ii} + \lambda_i = v$$

时达到. 然而，考虑到约束条件，不可能总是存在正的 A_{ii} 满足上述方程. 和上一节的讨论类似，在不满足的情况下根据库恩-塔克条件可以证明最优解对应于取

$$A_{ii} = (v - \lambda_i)^+$$

时的解. 其中 v 满足 $\sum A_{ii} = nP$. 此时 A 的值使 Y 的熵达到最大，因此，互信息达到最大.