第 16 讲 率失真理论

假设某信源产生序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 i.i.d.$\sim p(x)$，$x \in \mathcal{X}$. 在本章的证明中，假设字母表是有限的，但大多数离散情形下的证明都可以推广到连续的随机变量. 信源序列 X^n 的编码用下标 $f_n(X^n) \in \{1, 2, \cdots, 2^{nR}\}$ 表示，X^n 的译码用估计形式 $\hat{X}^n \in \hat{\mathcal{X}}$ 表示.

定义 1.1

失真函数或者**失真度量**是指从信源字母表与再生字母表的乘积空间到非负实数集上的映射

$$d : \mathcal{X} \times \hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{R}^+.$$

失真 $d(x, \hat{x})$ 是用来刻画使用 $\hat{x}$ 表示 x 时的代价度量.

定义 1.2

称失真度量是有界的，如果失真的最大值有限：

$$d_{max} := \max_{x\in\mathcal{X},\hat{x}\in\hat{\mathcal{X}}} d(x,\hat{x}) < \infty.$$

定义 1.3

x^n 与 $\hat{x}^n$ 序列间的失真定义为

$$d(x^n, \hat{x}^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, \hat{x}_i).$$

定义 1.4

一个 $(2^{nR}, n)$ 率失真码包括一个编码函数

$$f_n : \mathcal{X}^n \to \{1, 2, \cdots, 2^{nR}\}$$

和一个译码（再生）函数

$$g_n : \{1, 2, \cdots, 2^{nR}\} \to \hat{\mathcal{X}}^n.$$

关于这个 $(2^{nR}, n)$ 码的失真定义为

$$D = E[d(X^n, g_n(f_n(X^n)))] = \sum_{x^n} p(x^n) d(x^n, g(f_n(x^n))).$$

将 n 元组 $g_n(1), g_n(2), \cdots, g_n(2^{nR})$ 记为 $\hat{X}^n(1), \hat{X}^n(2), \cdots, \hat{X}^n(2^{nR})$，它构成一个码簿，且 $f_n^{-1}(1), f_n^{-1}(2), \cdots, f_n^{-1}(2^{nR})$ 为相应的分配区域.

定义 1.5

称率失真对 (R, D) 是可达的，若存在一个 $(2^{nR}, n)$ 率失真码序列 (f_n, g_n)，满足

$$\lim_{n\to\infty} E[d(X^n, g_n(f_n(X^n)))] \leq D.$$

定义 1.6

全体可达率失真对 (R, D) 所组成的集合的闭包称为信源的率失真区域.

定义 1.7

对于给定的失真 D，满足 (R, D) 包含于信源的率失真区域中的所有码率 R 的下确界称为是率失真函数$R(D)$.

定义 1.8

对于给定的码率 R，满足 (R, D) 包含于信源的率失真区域中的所有失真 D 的下确界称为是失真率函数$D(R)$.

定义 1.9

设信源 X 的失真度量为 $d(x,\hat{x})$，定义其信息率失真函数 $R^{(I)}(D)$ 为

$$R^{(I)}(D) = \min_{p(\hat{x}|x):\sum_{(x,\hat{x})} p(x)p(\hat{x}|x)d(x,\hat{x})\le D} I(X,\hat{X}).$$

其中的最小值取自使联合分布 $p(x,\hat{x}) = p(x)p(x|\hat{x})$ 满足期望失真限制的所有条件分布 $p(x|\hat{x})$.

定理 1.10

对于独立同分布的信源 X，若公共分布为 $p(x)$ 且失真函数 $d(x,\hat{x})$ 有界，那么其率失真函数与对应的信息率失真函数相等. 于是,

$$R(D)=R^{(I)}(D)=\min_{p(\hat{x}|x):\sum_{(x,\hat{x})}p(x)p(\hat{x}|x)d(x,\hat{x})\le D} I(X,\hat{X})$$

为在失真 D 下的最小可达码率.

定理 2.1

Bernoulli(p) 信源在汉明失真度量下的率失真函数为

$$R(D) = \begin{cases} H(p) - H(D), & 0 \le D \le \{p, 1-p\} \\ 0, & D > \min\{p, 1-p\}. \end{cases}$$

证明.

考虑在汉明失真度量下的二元信源 $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. 不失一般性，假设 $p < \frac{1}{2}$. 我们来计算量率失真函数

$$R(D) = \min_{p(\hat{x}|x): \sum_{(x,\hat{x})} p(x)p(\hat{x}|x)d(x,\hat{x}) \le D} I(X, \hat{X}).$$

用 $\oplus_2$ 表示模 2 加法运算，则 $X \oplus_2 \hat{X} = 1$ 等价于 $X = \hat{X}$. 我们无法直接最小化 $I(X;\hat{X})$，而且先获得率失真函数的一个下界，然后证明这个下界是可达的. 对于任何一个满足失真限制的联合分布，我们有

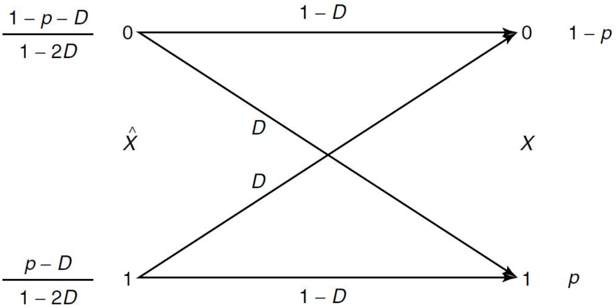
$$\begin{aligned} I(X;\hat{X}) &= H(X) - H(X|\hat{X}) \\ &= H(p) - H(X \oplus \hat{X}|\hat{X}) \\ &\ge H(p) - H(X \oplus \hat{X}) \\ &\ge H(p) - H(D). \end{aligned}$$

由于 $P(X \neq \hat{X}) \le D$ 且 $H(D)$ 在 $D \le 1/2$ 时单增的. 于是，

$$R(D) \ge H(p) - H(D).$$

证明.

我们下面说明，若能找到一个满足失真限制且有 $I(X;\hat{X})=R(D)$ 的联合分布，则这个下界实际上是率失真函数. 由于 $0\le D\le p$，选取 $(X,\hat{X})$ 使其联合分布满足如下图所示的二元对称信道，则可以达到上式中的率失真函数.



证明.
我们来解释如何得到上面所述的信道输入处 $\hat{X}$ 的分布，使输出分布 X 服从上图中指定的分布. 令 $r = P(\hat{X} = 1)$，并且对 r 的选取满足

$$r(1-D)+(1-r)D = p$$

或

$$r = \frac{p-D}{1-2D}.$$

若 $D \leq p \leq 1/2$，则 $p(\hat{X}=1) \geq 0$，且 $P(\hat{X}=0) \geq 0$. 于是我们有

$$I(X;\hat{X}) = H(X) - H(X|\hat{X}) = H(p) - H(D)$$

且期望失真为 $P(X \neq \hat{X}) = D$.

证明.
若 $D \geq p$，则可通过令 $\hat{X}=0$ 的概率为 1 而达到码率 $R(D)=0$. 此时，$I(X;\hat{X})=0$，且期望失真为 $D=p$. 同样地，若 $D \geq 1-p$，则可通过令 $\hat{X}=1$ 的概率为 1 而达到码率 $R(D)=0$. 因此，二元信源的率失真函数为

$$R(D)=\begin{cases} H(p)-H(D), & 0 \leq D \leq \min\{p, 1-p\} \\ 0, & D > \min\{p, 1-p\}. \end{cases}$$

从而得证. □

定理 2.2

一个 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 信源在平方误差失真度量下的率失真函数为

$$R(D)=\begin{cases}\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}, & 0\le D\le\sigma^2,\\ 0, & D>\sigma^2.\end{cases}$$

证明.

设 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，由推广到连续型字母表情形的率失真定理，我们有

$$R(D) = \min_{f(\hat{x}|x): E(\hat{X}-X)^2 \le D} I(X; \hat{X})$$

与前面的例子类似，首先获得率失真函数的一个下界，然后证明这个下界是可达的.
由于 $E(X - \hat{X})^2 \le D$，我们有

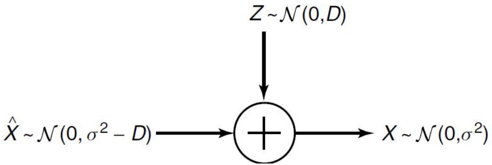
$$\begin{aligned}
I(X; \hat{X}) &= h(X) - h(X|\hat{X}) \\
&= \frac{1}{2}\log(2\pi e)\sigma^2 - h(X - \hat{X}|\hat{X}) \\
&\ge \frac{1}{2}\log(2\pi e)\sigma^2 - h(X - \hat{X}) \\
&\ge \frac{1}{2}\log(2\pi e)\sigma^2 - h(\mathcal{N}(0, E(X - \hat{X})^2)) \\
&= \frac{1}{2}\log(2\pi e)\sigma^2 - \frac{1}{2}\log(2\pi e)E(X - \hat{X})^2 \\
&\ge \frac{1}{2}\log(2\pi e)\sigma^2 - \frac{1}{2}\log(2\pi e)D = \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}.
\end{aligned}$$

证明.

因此，

$$R(D) \geq \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D}. \tag{2.1}$$

为了求得达到这个下界时的条件密度 $f(\hat{x}|x)$，通常更为简便的办法是着眼考虑条件密度函数 $f(x|\hat{x})$，对此，有时称作测试信道. 和二元信源情形一样，我们希望去寻找使等号成立的 $f(x|\hat{x})$. 选取如下图所示的联合分布.



证明.

如果 $D \le \sigma^2$，取

$$X = \hat{X} + Z,\ \hat{X} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 - D),\ Z \sim \mathcal{N}(0, D).$$

其中 $\hat{X}$ 与 Z 独立. 对于该联合分布，计算可得

$$I(X; \hat{X}) = \frac{1}{2} \log \frac{\sigma^2}{D}$$

以及 $E(X - \hat{X})^2 = D$，于是这个联合分布可以达到 (2.1) 中的下界. 如果 $D > \sigma^2$，以概率 1 选取 $\hat{X} = 0$，则由此可得 $R(D) = 0$. 因此，高斯信源在平方误差失真下的率失真函数为

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \dfrac{\sigma^2}{D}, & 0 \le D \le \sigma^2, \\ 0, & D > \sigma^2. \end{cases}$$

$\square$

- 本小节考虑 m 个独立 (但服从不同的分布) 的正态随机信源 $X_1, \cdots, X_m$ 的表示问题, 其中 $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, 失真为平方误差失真.
- 假设用 R 比特来表示这个随机向量.
- 自然有这样一个问题: 如何分配这些比特到各成员, 才能使总失真最小?
- 将信息率失真函数的定义推广到向量情形, 我们有

$$R(D) = \min_{f(\hat{x}^m|x^m):\mathsf{E}\, d(X^m,\hat{X}^m)\le D} I(X^m;\hat{X}^m),$$

其中 $d(X^m, \hat{X}^m) = \sum_{i=1}^m (x_i - \hat{x}_i)^2$.

由前面的例子的讨论, 我们有

$$
\begin{aligned}
I(X^m;\hat{X}^m) &= h(X^m) - h(X^m|\hat{X}^m) \\
&= \sum_{i=1}^{m} h(X_i) - \sum_{i=1}^{m} h(X_i|X^{i-1},\hat{X}^m) \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} h(X_i) - \sum_{i=1}^{m} h(X_i|\hat{X}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} I(X_i;\hat{X}_i) \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} R(D_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_i^2}{D_i})^+,
\end{aligned}
$$

其中 $D_i = \mathsf{E}(X_i - \hat{X}_i)^2$. 等号可由前面例子类似地选取 $f(x^m|\hat{x}^m) = \prod_{i=1}^m f(x_i|\hat{x}_i)$ 以及分别选取分布 $\hat{X}_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2 - D_i)$ 得到.

因此, 求解率失真问题可简化如下的最优化问题 (为了简便起见, 使用奈特为单位):

$$R(D)=\min_{\sum D_i=D}\sum_{i=1}^{m}\max\{\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma_i^2}{D_i},0\}.$$

用拉格朗日乘子法, 我们建立函数

$$J(D)=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma_i^2}{D_i}+\lambda\sum_{i=1}^{m}D_i.$$

同时关于 D_i 求偏导数, 并令其等于 0, 我们有

$$\frac{\partial J}{\partial D_i}=-\frac{1}{2}\frac{1}{D_i}+\lambda=0$$

或

$$D_i=\lambda'.$$

此时，由库恩–塔克条件可导出

$$\frac{\partial J}{\partial D_i} = \frac{1}{2}\frac{1}{D_i} + \lambda,$$

其中 λ 的选取满足

$$\frac{\partial J}{\partial D_i} \begin{cases} = 0 & \text{如果 } D_i < \sigma_1^2, \\ \leq 0 & \text{如果 } D_i \geq \sigma_1^2. \end{cases}$$

定理 2.3: 并联高斯信源的率失真

设 $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为独立的高斯随机变量, 假定失真度量为 $d(x^m, \hat{x}^m) = \sum_{i=1}^m (x_i - \hat{x}_i)^2$, 则率失真函数为

$$R(D) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{D_i},$$

其中

$$D_i = \begin{cases} \lambda & \text{如果}\lambda < \sigma^2, \\ \sigma_i^2 & \text{如果}\lambda < \sigma^2. \end{cases}$$

其中 λ 的选取满足 $\sum_{i=1}^m D_i = D$.