第 12 讲 年龄和剩余寿命

用非负随机变量 X 表示某种设备的使用寿命. 则时间 t 时服役的设备的更新时刻为 t 以前的最后一次更新时刻 $S_{N(t)}$，寿终时刻为 t 之后的第一次更新时刻 $S_{N(t)+1}$. 同样地我们定义

$$A(t) = t - S_{N(t)},\ R(t) = S_{N(t)+1} - t.$$

$A(t)$ 是 t 时服役的部件的使用年龄，$R(t)$ 是 t 时服役的部件的剩余寿命. 以后将 $A(t)$ 简称为 年龄，将 $R(t)$ 简称为 剩余寿命.

假设设备已经使用很久了，这相当于更新过程在很久之前就开始了，所以研究现在服役的设备还能工作多长时间，只需研究 $t \to \infty$ 时的极限

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \le y).$$

用 $F(y)$ 表示更新间隔 X_i 的分布函数：$F(y) = P(X_i \le y)$. 用 $\mu = E[X_i]$ 表示 X_i 的数学期望. 下面设 $\mu \in (0, \infty)$.

设一个工作系统的某易损部件有独立同分布的使用寿命 $X_1, X_2, \cdots$. 部件损坏后立即更新，相应的更新过程是 $\{N(t)\}$. 对于固定的 $y > 0$，设每个部件的试用期为 y，试用期后进入工作期. 让我们把试用期称为开状态，把工作期称为关状态. 一个部件的使用寿命如果小于 y，则只有开状态，没有关状态.

用数学符号表示出来：第 i 个部件的试用期是是 $U_i = \min(y, X_i)$，工作期是 $V_i = X_i - U_i$. 可以看出 (U_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 是独立同分布的随机向量序列，$X_i = U_i + V_i$. 对于 $\{N(t)\}$ 来讲，t 时为开状态的充分必要条件是 t 时的服役部件的年龄 $A(t) \le y$，即有

$$\{A(t) \le y\} = \{t \text{ 时是开状态}\}.$$

如果 X_i 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) \le y) = \lim_{t\to\infty} P(t \text{ 时开}) = \frac{E[U_1]}{\mu}.$$

因为

$$\begin{aligned} E[U_1] = E[\min(y, X_1)] &= \int_0^\infty P(\min(y, X_1) > s)ds \\ &= \int_0^\infty P(y > s, X_1 > s)ds = \int_0^y P(X_1 > s)ds \\ &= \int_0^y \overline{F}(s)ds, \end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t)\le y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds.$$

也就是说，对于较大的 t，年龄 $A(t)$ 的分布函数可以用

$$F_A(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds,\ y\ge 0$$

近似，其中 $\mu = E[X_i]$.

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

年龄，寿命与更新间隔的比较

- $A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较
- $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔
- $EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

如果认为易损部件在寿终前的 y 小时进入异常状态，并把异常状态称为关状态，把异常之前的正常状态称为开状态，则第 i 个部件的关状态时间长为 $V_i = \min(y, X_i)$，开状态时间长为 $U_i = X_i - V_i$.
可以看出 (U_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 也是独立同分布的随机向量序列，$X_1 = U_i + V_i$. $\{N(t)\}$ 是以 $\{X_i\}$ 为更新间隔的更新过程. 对于 $\{N(t)\}$ 来讲，t 时是关状态的充分必要条件是 t 时服役部件的剩余寿命 $R(t) \le y$，即

$$\{R(t) \le y\} = \{t \text{ 时是关状态}\}.$$

如果 X_i 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \le y) = \lim_{t\to\infty} P(t \text{ 时关}) = \frac{E[V_1]}{\mu}.$$

因为

$$E[V_i] = E[\min(y, X_1)] = \int_0^y \overline{F}(s)ds,$$

所以得到

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \le y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds.$$

也就是说，对于较大的 t，剩余寿命 $R(t)$ 的分布函数也可以用

$$F_R(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds, \ y \ge 0$$

近似，其中 $\mu = E[X_i]$.

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

年龄，寿命与更新间隔的比较

- $A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较
- $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔
- $EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

t 时服役部件的寿命是该部件在 t 是的年龄和剩余寿命之和:

$$X_{N(t)+1} = A(t) + R(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}.$$

对于确定的 $y > 0$，为了得到 $X_{N(t)+1}$ 的极限分布，利用示性函数 $1[\cdot]$ 定义

$$U_i = X_i 1[X_i > y],\ V_i = X_i I[X_i \le y],\ i = 1, 2, \cdots .$$

于是 (U_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 是独立同分布的随机向量，且 $X_i = U_i + V_i$. 用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{U_i\}$ 为开状态，以 $\{V_i\}$ 为关状态的开关系统. 对于更新过程 $\{N(t)\}$ 来讲，一个部件的使用寿命 $\le y$ 时，这个部件就一直处于关状态，否则一直处于开状态. 于是服役部件在 t 时处于关状态的充分必要条件是其使用寿命 $X_{N(t)+1} \le y$，即

$$\{X_{N(t)+1} \le y\} = \{t \text{ 是关状态}\}.$$

如果 X_i 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty} P(X_{N(t)+1} \le y) = \lim_{t\to\infty} P_t(t \text{ 时关}) = \frac{E[V_1]}{\mu}.$$

注意到

$$E[V_1] = E[X_1 I[X_1 \le y]] = \int_0^y s dF(s).$$

所以得到

$$\lim_{t\to\infty} P(X_{N(t)+1} \le y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y s dF(s).$$

也就是说，对于较大的 t，t 时服役部件的使用寿命可以用

$$F_X(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y s dF(s)$$

近似，其中 $\mu = E[X_i]$.

我们知 $S_{N(t)}$ 是 t 之前的最后一次更新时刻. 下面推导 $S_{N(t)}$ 的分布函数.

利用 $S_0=0$，$\{N(t)=n\}=\{S_n\le t, S_{n+1}>t\}$，对 $x\in[0,t]$ 得到

$$
\begin{aligned}
P(S_{N(t)}\le x) &= P(S_0\le x, N(t)=0)+\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\le x, N(t)=n)\\
&= P(X_1>t)+\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\le x, S_{n+1}>t)\\
&= \overline{F}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}P(S_n\le x, S_n+X_{n+1}>t|S_n=s)dF_n(s)\\
&= \overline{F}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{x}P(X_{n+1}>t-s)dF_n(s)\\
&= \overline{F}(t)+\int_0^{x}\overline{F}(t-s)dm(s).
\end{aligned}
$$

再由此得到 $A(t)$ 的生存函数

$$\begin{aligned}P(A(t) > x) &= P(t - S_{N(t)} > x) = P(S_{N(t)} < t - x) \\ &= \overline{F}(t) + \int_0^{(t-x)-} \overline{F}(t-s)dm(s), \ 0 \le x \le t,\end{aligned}$$

其中 $\int_a^{b-}$ 表示区间 $[a, b)$ 上的积分.

我们也可以计算 $R(t)$ 的生存函数，对于任意 $t, x, y \geq 0$，我们有

$$P(R(t) > x | S_1 = y) = \begin{cases} 1 & y > t + x, \\ 0 & t < y \leq t + x, \\ P(R(t-y) > x) & 0 \leq y \leq t. \end{cases}$$

记 $K_x(t) = P(R(t) > x)$，则

$$K_x(t) = \int_0^\infty P(R(t) > x | S_1 = y) dF(y) = \bar{F}(t+x) + \int_0^t K_x(t-y) dF(y).$$

解上述更新方程，我们得到

$$P(R(t) > x) = K_x(t) = \bar{F}(t+x) + \int_0^t [\bar{F}(t+x-y)] dm(y).$$

定理 5.1

设 $\{X_i\}$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔，$m(t)=E[N(t)]$ 是更新函数，$\overline{F}(s)=P(X_1>s)$，$\mu=E[X_1]\in(0,\infty)$，则

(1) $S_{N(t)}$ 有分布函数

$$F_{S_{N(t)}}(x)=P(S_{N(t)}\le x)=\overline{F}(t)+\int_0^x\overline{F}(t-s)dm(s),\ 0\le x\le t;$$

(2) $A(t)$ 有生存函数

$$\overline{F}_{A(t)}(x)=\overline{F}(t)+\int_0^{(t-x)-}\overline{F}(t-s)dm(s);$$

(3) 当 X_1 不是格点随机变量时，有

$$\lim_{t\to\infty}P(A(t)\le y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y\overline{F}(s)ds,$$

$$\lim_{t\to\infty}P(R(t)\le y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y\overline{F}(s)ds,$$

$$\lim_{t\to\infty}P(X_{N(t)+1}\le y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y sdF(s).$$

由定理 6.4 (1) 得到

$$P(S_{N(t)}=0)=\overline{F}(t)+\overline{F}(t)m(0)=\overline{F}(t)[1+m(0)].$$

这说明 $S_{N(t)}$ 一般不是连续型随机变量.
另外，在式

$$F_{S_{N(t)}}(x)=P(S_{N(t)}\le x)=\overline{F}(x)+\int_0^s \overline{F}(t-s)dm(s),\ 0\le x\le t;$$

中关于 x 微分，我们有

$$dF_{S_{N(t)}}(x)=\overline{F}(t-x)dm(x),\ 0<x\le t.$$

注意 $S_{N(t)}=0$ 表示 $(0,t]$ 中没有更新发生，所以 $F(x)$ 连续时，

$$\{S_{N(t)}=0\}=\{X_1>t\}.$$

对于开关系统，在条件 $S_{N(t)}=0$ 下，$U_1>t$ 表示系统的第一次开关状态还没有结束，所以当 $F(x)$ 连续时，

$$P(t\text{ 时开}|S_{N(t)}=0)=P(U_1>t|X_1>t)=\frac{P(U_1>t)}{P(X_1>t)}.$$

用 $N_Y(t)$ 表示以 $\{Y_i\}$ 为更新间隔的更新过程，对于更新时刻 $\xi_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ 和 $n\ge 1$，$t\ge 0$，于是

$$\{\xi_{n-1}\le t<\xi_n\}=\{N_Y(t)=n-1\}.$$

例 5.2

甲一开始为自己的手机充值 b 元，并决定只要发现手机余额小于 a 元就立即充值到 b 元，以此类推. 假设他的通话间隔是独立同分布的随机变量 $\{X_i\}$，每次的通话费是独立同分布的随机变量 $\{Y_i\}$，与 $\{X_i\}$ 独立. 将通话时间忽略不记时，对于充分大的 t，估算 t 时手机中至少有 x 元余额的概率 p.

解.

用 $\xi_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 表示前 n 次通话的总消费. 设第 N_a 次通话后的余额首次少于 a 元，则有

$$\begin{aligned}\{N_a = n\} &= \{b - \xi_{n-1} \geq a, b - \xi_n < a\} \\ &= \{\xi_{n-1} \leq b - a < \xi_n\} = \{N_Y(b-a) = n-1\} \\ &= \{N_Y(b-a) + 1 = n\}\end{aligned}$$

于是得到 $N_a = N_Y(b-a) + 1$. 现把每次充值视为一次更新，第一个更新间隔为 $Z_1 = \sum_{i=1}^{N_n} X_i$. 对 $x \geq a$，将上面的 a 换成 x，就知道第 $N_x = N_Y(b-x) + 1$ 次通话后余额首次少于 x 元，并且 $U_1 = \sum_{i=1}^{N_x} X_i$ 是余额首次少于 x 元的时间. 将余额大于 x 元的时间段称为开状态，少于等于 x 元的时间段称为关状态，则有

$$p \approx \lim_{t \to \infty} P(t \text{ 时开}) = \frac{E[U_1]}{E[Z_1]}.$$

证明.

N_a, N_x 由 Y_i 决定，与 $\{X_i\}$ 独立. 用瓦尔德定理我们有

$$E[Z_1] = E[N_a]E[X_1] = (m_G(b-a)+1)E[X_1],$$

$$E[U_1] = E[N_x]E[X_1] = (m_G(b-x)+1)E[X_1].$$

其中的 $m_G(t) = E[N_Y(t)]$ 是 $N_Y(t)$ 的更新函数. 从而我们有

$$p \approx \frac{1+m_G(b-x)}{1+m_G(b-a)}.$$

$\square$

年龄 $A(t)$ 的分布

剩余寿命 $R(t)$ 的分布

t 时服役部件的寿命分布

$S_{N(t)}$ 的分布函数

总结

年龄，寿命与更新间隔的比较

- $A(t)$, $R(t)$ 和更新间隔的比较
- $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔
- $EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

定义 6.1

称随机变量 X 随机小于 随机变量 Y，如果对于一切 s，$P(X \leq s) \geq P(Y \leq s)$. 当 X 随机小于 Y 时，也称 Y 随机大于 X.

命题 6.2

如果非负随机变量 X 随机小于 Y，则 Y 是非负随机变量，并且有

$$E[X] \leq E[Y].$$

证明.

设 X,Y 分别有生存函数 $\overline{F}(s)=P(X>s)$，$\overline{G}(s)=P(Y>s)$，则对任意 s，$\overline{G}(s)\geq\overline{F}(s)$. 于是有

$$P(Y\geq 0)=\overline{G}(0-)\geq\overline{F}(0-)=1.$$

所以 Y 是非负随机变量，并且有

$$E[Y]=\int_0^\infty\overline{G}(s)ds\geq\int_0^\infty\overline{F}(s)ds=E[X].$$

□

例 6.3

设 $\{X_i\}$ 独立同分布，共同的密度函数是

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, \ x \geq 0.$$

这是 1 个自由度的卡方分布的密度，$\mu = E[X_1] = 1$. 用 η 表示以

$$F_A(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(x) dx$$

为分布函数的随机变量. 利用洛必达法则得到

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{F(x)}{F_A(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\mu f(x)}{1 - F(x)} = \infty.$$

所以对于充分小的正数 x_0，$F(x_0) > F_A(x_0)$. 利用 $\lim_{t\to\infty} P(A(t) \leq x) = F_A(x)$ 我们知，当 t 充分大时，有

$$P(A(t) \leq x_0) < P(X_1 \leq x_0).$$

所以 $A(t)$ 并不随机小于 X_1.

定理 6.4

设 $\{X_i\}$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔，$m(t)=E[N(t)]$ 是更新函数，$\overline{F}(s)=P(X_1>s)$，$\mu=E[X_1]\in(0,\infty)$，则

(1) $S_{N(t)}$ 有分布函数

$$F_{S_{N(t)}}(x)=P(S_{N(t)}\le x)=\overline{F}(t)+\int_0^x \overline{F}(t-s)dm(s),\ 0\le x\le t;$$

(2) $A(t)$ 有生存函数

$$\overline{F}_{A(t)}(x)=\overline{F}(t)+\int_0^{(t-x)-}\overline{F}(t-s)dm(s);$$

(3) 当 X_1 不是格点随机变量时，有

$$\lim_{t\to\infty}P(A(t)\le y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds,$$

$$\lim_{t\to\infty}P(R(t)\le y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds,$$

$$\lim_{t\to\infty}P(X_{N(t)+1}\le y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y sdF(s).$$

首先由定理 6.4 (1) 和 $S_{N(t)} \le t$ 得到

$$\overline{F}(t) + \int_0^t \overline{F}(t-s)dm(s) = P(S_{N(t)} \le t) = 1.$$

用 $\{X_i\}$ 表示更新间隔，引入

$$U_i = X_i 1[X_i > x],\ V_i = X_i 1[X_i \le x],\ i = 1, 2, \cdots,$$

则 (U_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 是独立同分布的随机向量序列，使得 $X_i = U_i + V_i$. 这时，$\{N(t)\}$ 又是以 $\{U_i\}$ 为开状态，以 $\{V_i\}$ 为关状态的开关系统. 于是 t 时间服役的部件在 t 时处于开状态的充分必要条件是其使用寿命 $X_{N(t)+1} > x$，即

$$\{X_{N(t)+1} > x\} = \{t \text{ 是开状态}\}.$$

U_1 的生存函数 $\overline{G}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\overline{G}(t) &= P(U_1 > t) = P(X_1 > x, X_1 > t) \\ &\geq P(X_1 > x)P(X_1 > t) = \overline{F}(x)\overline{F}(t), \ t \geq 0.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}P(X_{N(t)+1} > x) = P(t \text{ 时开}) &= \overline{G}(t) + \int_{)}^{t} \overline{G}(t-s)dm(s) \\ &\geq \overline{F}(x)\overline{F}(t) + \int_0^t \overline{F}(x)\overline{F}(t-s)dm(s) \\ &= \overline{F}(x)[\overline{F}(t) + \int_0^t \overline{F}(t-s)dm(s)] \\ &= \overline{F}(x).\end{aligned}$$

这就证明了 $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔 X_i. 于是我们对 $X_{N(t)+1}$ 的期望也大于对 X_i 的期望，即 $E[X_{N(t)+1}] \geq E[X_i]$.

下面证明

$$\lim_{t\to\infty} E[X_{N(t)+1}] = \frac{E[X^2]}{\mu}.$$

引入符号 $a \vee b = \max(a,b)$，则 $U = XI[X > x]$ 有生存函数

$$\overline{G}(t) = P(X > x, X > t) = \overline{F}(x \vee t).$$

我们有：

$$\begin{aligned} P(X_{N(t)+1} > x) &= P(t \text{ 时开}) \\ &= \overline{G}(t) + \int_0^t \overline{G}(t-s)dm(s) \\ &= \overline{F}(x \vee t) + \int_0^t \overline{F}(x \vee (t-s))dm(s). \end{aligned}$$

引入函数

$$h(t)=\int_0^\infty \overline{F}(x\vee t)dx,$$

其为 t 的单调不增非负函数. 我们有

$$\begin{aligned}
E[X_{N(t)+1}] &= \int_0^\infty P(X_{N(t)+1}>x)dx \\
&= \int_0^\infty \overline{F}(x\vee t)dx + \int_0^\infty\left(\int_0^t \overline{F}(x\vee(t-s))dm(s)\right)dx \\
&= h(t)+\int_0^t\left(\int_0^\infty \overline{F}(x\vee(t-s))dx\right)dm(s) \\
&= h(t)+\int_0^t h(t-s)dm(s).
\end{aligned}$$

当 $t \to \infty$ 时，用 $\mu = E[X_1] < \infty$ 我们得到

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t \overline{F}(t)dx + \int_t^\infty \overline{F}(x)dx \\
&= t\overline{F}(t) + \int_t^\infty \overline{F}(x)dx \\
&\le \int_t^\infty xdF(x) + \int_t^\infty \overline{F}(x)dx \to 0.
\end{aligned}
$$

如果 X 不是格点的，利用关键更新定理得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-s)dm(s) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(t)dt \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (\int_0^\infty \overline{F}(x\vee t)dx)dt \\
&= \frac{1}{\mu}(\int_0^t \overline{F}(t)dx + \int_t^\infty \overline{F}(x)dx)dt \\
&= \frac{1}{\mu}[\int_0^\infty t\overline{F}(t)dt + \int_0^\infty (\int_0^x \overline{F}(x)dt)dx] \text{ (交换积分次序)} \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty 2t\overline{F}(t)dt \\
&= E[X^2]/\mu.
\end{aligned}
$$

所以当 $\mu<\infty$ 时，$\lim_{t\to\infty} E[X_{N(t)+1}] = \frac{E[X^2]}{\mu}$.

定理 6.5

设 $\{X_i\}$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔，$\mu = E[X_1] \in (0, \infty)$. 如果 X_1 不是格点随机变量，则有以下结论：

(1) $\lim_{t\to\infty} E[X_{N(t)+1}] = E[X_1^2]/\mu$;

(2) $\lim_{t\to\infty} E[A(t)] = E[X_1^2]/(2\mu)$;

(3) $\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = E[X_1^2]/(2\mu)$;

(4) $\lim_{t\to\infty}[m(t) - t/\mu + 1] = E[X_1^2]/(2\mu^2)$.

在上面的结论中，如果 $E[X_1^2] = \infty$，则等式两边都是正无穷.

证明.

可以用证明 (1) 的方法证明 (2) 和 (3). 下面证明 (4)，利用 $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ 我们有

$$E[R(t)] = E[S_{N(t)+1}] - t = (m(t)+1)\mu - t.$$

于是用结论 (3) 我们有

$$m(t) - t/\mu + 1 = E[R(t)]/\mu \to E[X^2]/(2\mu^2). \qquad \square$$

在更新过程中，如果更新间隔 X_i 的方差 $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) > \mu^2$. 则有

$$\frac{E[X^2]}{2\mu} = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu} > \frac{\mu^2+\mu^2}{2\mu} = \mu.$$

于是对于充分大的 t，有

$$E[A(t)] > \mu, \ E[R(t)] > \mu.$$

也就是说 t 时服役部件的平均年龄或平均剩余寿命，都有可能大于同类备用部件的平均寿命 μ.

在工程技术中，**威布尔分布**经常用来描述系统部件的使用寿命. 对 $Y \sim \mathcal{E}(1)$，和正的常数 α，m，可以计算出 $X = (\alpha Y)^{1/m}$ 的密度函数

$$f(x) = \frac{m}{\alpha} x^{m-1} e^{-x^m/\alpha}, \ x \geq 0.$$

这时称 X 服从参数为 m，α 的威布尔分布，记做 $X \sim W(m, \alpha)$.

例 6.6

如果更新间隔 X 服从参数为 $m = 0.9$，$\alpha = 6$ 的威布尔分布，则对充分大的 t，$EA(t) > \mu$，$ER(t) > \mu$.

证明.
可以直接计算出，

$$\mu = EX = \alpha^{1/m}\Gamma(1+\frac{1}{m}),$$
$$\sigma^2 = \mathsf{Var}(X) = \alpha^{2/m}[\Gamma(1+\frac{2}{m}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{m})].$$

对于 $m = 0.9$，$\alpha = 6$ 我们可得

$$\mu = 7.7038,\ \sigma^2 = 73.5228,\ \frac{EX^2}{2\mu} = 8.6238.$$

$\square$