第 3 讲 随机过程

随机过程

定义 1.1

假设 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 是概率空间, T 是指标集, $\mathcal{E}$ 为点集. 称一族随机变量 $X(\omega, t): \Omega \mapsto \mathcal{E}$, $t \in T$ 为**随机过程**, 记作 $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$, 其中称 T 为**时间参数空间**, $\mathcal{E}$ 为**状态空间**. $\{X(t) = a\}$ 表示随机过程在 t 时刻处于状态 a. 有时将时间 t 作为下标, 如 $X_t(\omega)$; 有时为简洁起见, 略去 ω, 仅写作 $X(t)$ 或 X_t.

参数 $t \in T$ 一般表示时间. 通常 T 为 $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ 或区间 $[a, b]$ (其中 a 可以取 $-\infty$, b 可以取 $-\infty$). 当 T 取可数集时，通常称 $\{X(t) : t \in T\}$ 是一个随机序列.

注记 1.2

有时，从另一个角度来看随机过程是很有益的，即随机过程 $\{X(t,\omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ 可以看成是定义在 $T \times \Omega$ 上的二元函数. 对于固定的样本点 $\omega \in \Omega$, $X(t,\omega)$ 就是定义在 T 上的一个函数，称为一条样本路径或轨道. 而对于固定的时刻 $t \in T$, $X(t) = X(t,\omega)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个随机变量.

例 1.3

我们可以用 $X(t)$ 来表示股票在 t 时刻的价格，则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 就可以描述股票价格随时间推移而产生的随机波动现象。

例 1.4: 余弦波过程

令 Θ 是 $[0,2\pi]$ 上的均匀随机变量, a,ω 为给定的正常数. 定义

$$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta),\ \ -\infty<t<\infty.$$

那么 $\boldsymbol{X}=(X(t),-\infty<t<\infty)$ 为随机过程, 其中 $I=(-\infty,\infty)$, $\mathcal{E}=[-a,a]$. 任给一个相位 Θ, $X(t)$ 为一条余弦波曲线, 振幅为 a, 频率为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

例 1.5

假设 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为一列独立同分布随机变量,

$$P(\xi_n = 1) = p,\ P(\xi_n = -1) = 1 - p,$$

其中 $0 < p < 1$. 定义

$$S_0 = 0, S_n = S_{n-1} + \xi_n,\ n \geq 1,$$

那么 $S = (S_n, n \geq 0)$ 为随机过程, 时间参数空间 $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 状态空间 $\mathcal{E} = \mathbb{Z}$. 该过程用于描述直线上随机游动: 从原点出发, 一步一格, 向右走的概率为 p, 向左走的概率为 $1 - p$, S_n 表示第 n 步以后所处的位置.

定义 1.6

随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 称为相互独立的，如果对任意 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 以及 $s_1, \cdots, s_m$， $\mathbf{X} = (X(t_1), \cdots, X(t_n))$ 和 $\mathbf{Y} = (Y(s_1), \cdots, Y(s_m))$ 是独立的.

研究随机现象主要是研究其统计规律性．对于一个或有限个随机变量来说，掌握了分布函数就能完全了解随机变量．对于随机过程 $\{X(t):t\in T\}$，为了描述它的统计特性，自然要知道对于每个 t，$X(t)$ 的分布函数 $F(t,x)=P(X(t)\leq x)$，以及它们在任意 n 个时间点的联合分布．对于有限个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，我们还需定义随机过程的 n 维分布：

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P(X(t_1)\leq x_1,X(t_2)\leq x_2,\cdots,X(t_n)\leq x_n)$$

随机过程的所有有限维分布全体

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n):t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$$

称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的有限维分布族，或称为这个随机过程的概率分布．具有相同的有限维分布的随机过程称为是同分布的．同分布的随机过程有相同的统计性质．

不难看出，一个随机过程的概率分布具有如下两个性质：

(1) **对称性：** 对 $1, 2, \cdots, n$ 的任意排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$，有

$$
\begin{aligned}
&F_{t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_n}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_n}) \\
=&P(X(t_{j_1}) \leq x_{j_1}, X(t_{j_2}) \leq x_{j_2}, \cdots, X(t_{j_n}) \leq x_{j_n}) \\
=&P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \cdots, X(t_n) \leq x_n) \\
=&F_{t_1, t_2, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n).
\end{aligned}
$$

(2) **相容性：** 对于 $m < n$，有

$$
\begin{aligned}
&F_{t_1, t_2, \cdots, t_m, t_{m+1}, \cdots, t_n}(x_1, x_2, \cdots, x_m, \infty, \cdots, \infty) \\
=&F_{t_1, t_2, \cdots, t_m}(x_1, x_2, \cdots, x_m).
\end{aligned}
$$

Kolmogorov 存在定理

定理 1.7

设分布函数族 $\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ t_1,t_2,\cdots,t_n \in T, n \geq 1\}$ 满足上述的对称性和相容性，则必存在一个随机过程 $\{X(t),\ t \in T\}$，使

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) : t_1,t_2,\cdots,t_n \in T, n \geq 1\}$$

恰好是 $\{X(t),\ t \in T\}$ 的概率分布.

Kolmogorov 存在定理说明，随机过程的有限维分布族是随机过程概率特征的完整描述.

定义 2.1: 均值函数

假设对于每一个 $t \in T$, $E|X(t)| < \infty$, 称

$$\mu_X(t) = EX(t), \ t \in T$$

是 X 的**均值函数**.

定义 2.2: 自协方差函数

假设对每一个 $t \in T$, $E[X(t)^2] < \infty$, 称

$$\sigma_X^2(t) = \mathsf{Var}(X(t)), \ t \in T$$

为 X 的**方差函数**. 定义

$$r_{s,t}(s,t) = E[X(s)X(t)], \ s,t \in T,$$

称 $r_X(s,t)$ 为 X 的**自相关函数**. 定义**自协方差函数**为

$$\mathsf{Cov}(X(s), X(t)) = r_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t), \ s,t \in T.$$

定义 2.3

假设 $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y(t), t \in T)$ 是两个随机过程，并且对每一个 $t \in T$，$E[X(t)^2] < \infty$，$E[Y(t)^2] < \infty$. 定义

$$r_{X,Y}(s,t) = E(X(s)Y(t)), \ \ s,t \in T,$$

称 $r_{X,Y}(s,t)$ 为 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的**互相关函数**.

例 2.4

对于余弦波过程，我们来计算一下它的均值函数，方差函数以及自相关函数．我们有

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= aE\cos(\omega t+\Theta) \\ &= a\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega t+\theta)d\theta = 0,\ \ t\in T;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] \\ &= a^2E[\cos(\omega s+\Theta)\cos(\omega t+\Theta)] \\ &= \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+\theta)\cos(\omega t+\theta)d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s),\ \ s,t\in T.\end{aligned}$$

因此，方差函数为 $\sigma_X^2(t)=\frac{a^2}{2},\ t\in T$.

例 2.5

对于简单随机游动，对于 $p = 1/2$ 的情形，经过一些简单的计算，我们可以得到

$$\mu_S(n) = ES_n = 0,\ \ n \geq 0$$

以及

$$r_s(n,m) = E[S_nS_m] = E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i\xi_j] = n \wedge m,\ \ n,m \geq 0,$$

其中 $n \wedge m$ 表示 n 和 m 中的最小值.

定义 3.1

令 $\boldsymbol{X} = (X(t), t \in T)$ 是一个随机过程, 对每一个 $t \in T$, $E[(X(t))^2] < \infty$, 如果

(1) 均值函数为常数, 即存在一个常数 μ 使得

$$\mu_X(t) \equiv \mu, \ \ t \in T;$$

(2) 自相关函数 $r_X(s,t)$ (等价地, 自协方差系数 $\mathrm{Cov}(X(s), X(t))$) 仅与时间差 $s-t$ 有关, 即存在一个函数 $\tau_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得

$$r_X(s,t) = \tau_X(s-t), \ \ s, t \in T,$$

那么称 X 为**弱平稳过程**, 有时也称为 **宽平稳过程**. 宽平稳的随机序列也称为**宽平稳序列**.

例 3.2

设 $\{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$ 为一列两两互不相关的随机变量序列，满足 $E[X_n]=0\ (n=0,1,\cdots)$，且

$$E[X_mX_n]=\begin{cases} 0, & m\neq n \\ \sigma^2, & m=n. \end{cases}$$

则 $\{X_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 为宽平稳序列. 这是因为协方差函数 $\mathrm{Cov}(X_n,X_m)=E[X_nX_m]$ 只与 $m-n$ 有关.

例 3.3: 滑动平均序列

设 $\{\epsilon_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为一列两两互不相关的具有相同均值 μ 和相同方差 σ^2 的随机变量序列，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为任意 k 个实数. 考虑如下定义的序列:

$$X_n = a_1\epsilon_n + a_2\epsilon_{n-1} + \cdots + a_k\epsilon_{n-k+1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

容易看出

$$E[X_n] = \mu(a_1 + a_2 + \cdots + a_k).$$

例: (续)

令 $\xi_j = \epsilon_j - \mu$，则由于 $\{\epsilon_j\}$ 两两不相关，我们知自协方差函数

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+\tau}) \\
=&E[(X_n - \mu(a_1 + a_2 + \cdots + a_k))(X_{n+\tau} - \mu(a_1 + a_2 + \cdots + a_k))] \\
=&E[(a_1\xi_n + a_2\xi_{n-1} + \cdots + a_k\xi_{n-k+1}) \\
&\quad (a_1\xi_{n+\tau} + a_2\xi_{n+\tau-1} + \cdots + a_k\xi_{n+\tau-k+1})] \\
=&\begin{cases} \sigma^2(a_k a_{k-\tau} + a_{k-1}a_{k-\tau-1} + \cdots + a_{\tau+1}a_1), & 0 \le \tau \le k-1 \\ 0, & \tau \ge k \end{cases}
\end{aligned}
$$

于是协方差函数仅与时间间隔 τ 有关，所以我们有 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为宽平稳序列.

例 3.4

余弦波过程是弱平稳过程.

例 3.5

简单随机游动不是弱平稳过程.

定义 3.6

令 $\boldsymbol{X} = (X(t).t \in T)$ 是一个随机过程. 如果对任意 $k \geq 1$, $t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$ 以及 $t \in T$ 都有

$$(X(t_1+t), X(t_2+t), \cdots, X(t_k+t)) =_d (X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_k)),$$

那么称 $\boldsymbol{X}$ 为**强平稳过程**或**严平稳过程**.

例 3.7

假设 $\boldsymbol{X} = (X_n, n \geq 0)$ 是一个随机过程, 并且所有 X_n 都相互独立同分布, 那么 $\boldsymbol{X}$ 是强平稳过程.

定义 3.8

令 $\boldsymbol{X}=(X(t),t\in T)$ 是一个随机过程. 对任意 $s<t$, 称 $X(t)-X(s)$ 为**过程增量**. 如果 $X(t)-X(s)$ 的分布仅依赖于时间差 $t-s$, 而与 s 和 t 无关, 那么称 $\boldsymbol{X}$ 是**平稳增量过程**.

定义 3.9

如果对任意 $k \geq 1$ 和 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, 增量

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_k) - X(t_{k-1})$$

是相互独立的, 那么称 X 是**独立增量过程**.

例 3.10

简单随机游动是独立平稳增量过程.

定理 3.11

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个独立增量过程，满足 $X(0) = 0$. 则 $X(t)$ 具有平稳增量的充分必要条件是：其特征函数具有可乘性，即

$$\phi_{X(t+s)}(a) = \phi_{X(t)}(a)\phi_{X(s)}(a).$$

定义 3.12

令 $\boldsymbol{X} = (X(t), t \in T)$ 是零均值随机过程, 如果对任意 $s \neq t$ 都有 $r_X(s,t) = 0$, 那么称 X 为 **白噪声**.

1. 随机过程基本概念
   - 随机过程定义
   - 随机过程概率分布
2. 随机过程的数字特征
3. 特殊过程
4. 指数分布

指数分布

定义 4.1

称连续型随机变量 X 服从参数 (或均值) $\lambda > 0$ 的指数分布，如果它的概率密度函数为

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0.$$

我们记 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

若 X 服从参数 $\lambda > 0$ 的指数分布，我们不难求得其累积分布函数为

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x > 0.$$

我们来计算一下 X 的期望和方差. 我们有

$$\begin{aligned} E[X^n] &= \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -x^n \lambda e^{-\lambda x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} n x^{n-1} dx \\ &= 0 + \frac{n}{\lambda} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}]. \end{aligned}$$

取 $n=1$ 和 $n=2$ 我们有

$$E[X]=\frac{1}{\lambda},$$
$$E[X^2]=\frac{2}{\lambda}E[X]=\frac{2}{\lambda^2}.$$

于是

$$\mathrm{Var}(X)=\frac{2}{\lambda^2}-(\frac{1}{\lambda})^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

定义 4.2

我们称一个连续型随机变量的分布具有 无记忆性，如果对任意 $s, t \geq 0$,

$$P(X \geq s+t | X \geq s) = P(X \geq t).$$

利用条件概率的定义，我们来验证指数分布具有无记忆性. 设 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. 则

$$\begin{aligned} P(X \geq s+t | X \geq s) &= \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = P(X \geq t). \end{aligned}$$

定理 4.3

如果取正值的连续型随机变量 X 具有无记忆性，则 X 具有指数分布.

证明.

- 设 X 是一个取正值的连续型随机变量，具有无记忆性.
- 设 F 是 X 的累积分布函数，记 $G(x) = 1 - F(x)$. 我们要证明：存在 $\lambda > 0$ 使得 $G(x) = e^{-\lambda x}$.
- 注意到由无记忆性，我们有对任意 $s, t \geq 0$，

$$G(s+t) = G(s)G(t).$$

- 由 G 的连续性，我们知存在 $a \geq 0$ 使得 $G(x) = a^x$.
- 由 F 是一个分布函数知 $0 < a < 1$，从而存在 $\lambda > 0$，使得

$$G(x) = e^{-\lambda x},$$

从而 X 服从指数分布. □

定理 4.4

令 $X_1, X_2.\cdots$ 是独立的参数为 λ 的指数随机变量，那么和 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ 服从 $\Gamma(n, \lambda)$ 分布，也就是说，S_n 有密度函数

$$g_n(s) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\lambda s} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s}, \quad s \geq 0.$$

证明.

对 n 应用归纳法证明. 当 $n=1$ 时，S_1 服从参数为 λ 的指数分布，其密度函数即为 $g_1(s)$. 假定公式在 n 时成立，注意到 $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$ 且 S_n 与 X_{n+1} 独立. 所以我们有 S_{n+1} 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1}}(s) &= \int_0^s f_{S_n}(t) f_{X_{n+1}}(s-t)dt \\ &= \int_0^s \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot \lambda e^{-\lambda(s-t)}dt \\ &= e^{-\lambda s}\lambda^n \int_0^s \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt = \lambda e^{-\lambda s}\frac{\lambda^n s^n}{n!}, \end{aligned}$$

即为 $g_{n+1}(s)$. □

命题 4.5

当 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$ 时，有

$$P(X_1 \le X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).$$

命题 4.6

设随机变量 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 相互独立，$T_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$. 我们有

$$P(T_i = \min(T_1, \cdots, T_n)) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

证明.

令 $S=T_i$，$U:=\min\{T_j|j\neq i\}$. 我们知 $U\sim\mathcal{E}((\lambda_1+\cdots+\lambda_n)-\lambda_i)$. 因此我们有

$$\begin{aligned}P(T_i=\min(T_1,\cdots,T_n)) &= P(S<U)\\ &= \int_0^\infty f_S(s)P(U>s)ds\\ &= \int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i s}e^{-((\lambda_1+\cdots+\lambda_n)-\lambda_i)s}ds\\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}.\end{aligned}$$

从而得证. $\square$

命题 4.7

设随机变量 $T_1, T_2, \cdots$ 相互独立，$T_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$. 用 I 表示最小的随机变量 T_i 的 (随机) 下标. 则 I 和 $V = \min\{T_1, \cdots, T_n\}$ 是相互独立的.

证明.

首先，我们有

$$P(V \le v) = 1 - e^{-\lambda v}, \ \lambda := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

记 $\lambda' = \lambda - \lambda_i$，$U := \min\{T_j | j \neq i\}$. 注意到 U 与 T_i 独立，且 $U \sim \mathcal{E}(\lambda')$. 注意到

$$\begin{aligned} P(V \le v, I = i) &= P(T_i \le v, U \ge T_i) \\ &= \int_0^v P(U \ge t_i | T_i = t_i) \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} dt_i \\ &= \int_0^v P(U \ge t_i) \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} dt_i \\ &= \int_0^v e^{-\lambda' t_i} \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} dt_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}(1 - e^{-\lambda v}). \end{aligned}$$

于是 $P(V \le v | I = i) = 1 - e^{-\lambda v} = P(V \le v)$，从而 V 和 I 相互独立. □

命题 4.8

设随机变量 $T_1, T_2, \cdots$ 相互独立，$T_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$. 定义 $W = \sum_{k=1}^{\infty} T_k$，$M = \min_k\{T_k\}$，$\lambda_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$，则

(1) $P(W = \infty) = 1$ 的充分必要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty} E[T_k] = \infty$;

(2) $P(W = \infty)$ 只能取值 1 或 0;

(3) $\lambda_0 < \infty$ 时，$M \sim \mathcal{E}(\lambda_0)$;

(4) $\lambda_0 = \infty$ 时，$M = 0$ a.s..

证明.

如果 $P(W=\infty)>0$，利用单调收敛定理我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} E[T_k] &= E[\sum_{k=1}^{\infty} T_k] = E[W] \\ &= \int_0^{\infty} P(W>s)ds \geq \int_0^{\infty} P(W=\infty)ds = \infty.\end{aligned}$$

下设 $\sum_{k=1}^{\infty} E[T_k]=\infty$. 我们有

$$\begin{aligned}E[\exp(-W)] &= E[\exp(-\sum_{k=1}^{\infty} T_k)] = \prod_{k=1}^{\infty} E[\exp(-T_k)] \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k s - s} ds = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{1+\lambda_k} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+1/\lambda_k} = [\prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{1}{\lambda_k})]^{-1}.\end{aligned}$$

证明.

注意到 $E[T_k]=1/\lambda_k$，我们有

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{\lambda_k})\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\sum_{k=1}^{\infty}E[T_k]=\infty,$$

所以 $E[\exp(-W)]=0$. 于是 $\exp(-W)=0$ a.s.，即 $W=\infty$ a.s.. 所以我们证明了 (1).

注意到上述推导也说明了只要 $P(W=\infty)>0$，就有 $\sum_{k=1}^{\infty}E[T_k]=\infty$，从而 $P(W=\infty)=1$. 这就证明了 (2).

证明.

下面为我们来证明 (3) 和 (4). 利用概率的连续性，得到

$$
\begin{aligned}
P(M \geq t) &= P(\bigcap_{k=1}^{\infty}\{T_k \geq t\}) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=1}^{n}\{T_k \geq t\}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} P(T_k \geq t) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t} = e^{-\lambda_0 t}.
\end{aligned}
$$

由此可知 M 服从参数为 λ_0 的指数分布. 当 $\lambda_0 = \infty$ 时，我们知对任意 $t > 0$，$P(M \geq t) = e^{-\infty} = 0$，所以 $P(M = 0) = 1$. □

例 4.9

一艘潜水艇有三个航行设备，但只要其中两个正常工作，潜水艇仍然可以在海上．假设三个设备损坏时间分别服从均值为 1 年，1.5 年和 3 年的指数分布，那么潜水艇可以在海上平均待多长时间?

证明.

由条件我们知三个设备损坏时间服从参数 1, $2/3$ 和 $1/3$ 的指数分布. 于是第一次有设备损坏的时间服从参数 $1+2/3+1/3=2$ 的指数分布，从而第一次设备损坏的时间为 $1/2$ 年. 第一次有设备损坏时，损坏的设备是第一个设备的概率为 $1/(1+2/3+1/3)=1/2$，这时到下一次有设备损坏的时间服从参数为 $2/3+1/3=1$ 的指数分布，于是平均时间为 1 年. 损坏的设备是第二个设备的概率为 $(2/3)/(1+2/3+1/3)=1/3$，这时到下一次有设备损坏的时间服从参数为 $1+1/3=4/3$ 的指数分布，于是平均时间为 $3/4$ 年. 损坏的设备是第三个设备的概率为 $(1/3)/(1+2/3+1/3)=1/6$，这时到下一次有设备损坏的时间服从参数为 $1+2/3=5/3$ 的指数分布，于是平均时间为 $3/5$ 年. 于是到第二个设备损坏的总平均时间为

$$1/2+(1/2)\cdot 1+(1/3)\cdot(3/4)+(1/6)\cdot(3/5)=0.5+0.5+025+0.10=1.35\text{年}.$$

$\square$