

第 4 讲 Poisson 过程

- 1 Poisson 分布
- 2 计数过程
- 3 Poisson 过程
- 4 泊松过程的基本性质
 - 泊松过程的数字特征
 - 泊松过程的联合分布
- 5 长时间的极限行为

定义 1.1

我们称一个随机变量 X 服从参数 λ 的 **Poisson 分布**, 如果 X 的分布列为

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

我们记 $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

设 $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, 我们有:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ie^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

为求其方差，我们首先计算 $E[X^2]$:

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2 e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i e^{-\lambda} \lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
 &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1) e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \\
 &= \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \right] \\
 &= \lambda(\lambda + 1).
 \end{aligned}$$

最后一个等式是因为第一项和式是一个参数 λ 的 Poisson 分布的期望值，而第二项合适是一个参数 λ 的 Poisson 分布的概率和。从而我们有

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda.$$

定理 1.2

如果 $X \sim \text{Bin}(n, p_n)$, 满足当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $np_n \rightarrow \lambda$. 那么

$$P(X = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

证明.

记 $\lambda_n = np_n$, 则

$$\begin{aligned} P(n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

由于对固定的 k 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^k = \lambda^k$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$ 以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1,$$

从而我们有

$$P(X = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$



- 1 Poisson 分布
- 2 计数过程
- 3 Poisson 过程
- 4 泊松过程的基本性质
 - 泊松过程的数字特征
 - 泊松过程的联合分布
- 5 长时间的极限行为

计数过程

我们用 $N(t)$ 表示时间段 $[0, t]$ 内某类事件发生的个数, 则对每个固定的 t , $N(t)$ 是随机变量. $\{N(t) : t \geq 0\}$ 构成了一个随机过程, 我们称之为**计数过程**. 我们后面将其简记为 $\{N(t)\}$.

计数过程满足如下的条件:

- (1) 对 $t \geq 0$, $N(t)$ 是取非负整数值的随机变量;
- (2) 对于 $t > s \geq 0$, $N(t) \geq N(s)$;
- (3) 对于 $t > s \geq 0$, $N(t) - N(s)$ 是时间段 $(s, t]$ 中的事件发生数;
- (4) $\{N(t)\}$ 的轨迹是单调不减右连续 (即对任意 $t \geq 0$, $\lim_{s \searrow t} N(s) = N(t)$) 的阶梯函数.
- (5) $\{N(t)\}$ 的轨迹具有左极限, 即对任意 $t > 0$, $\lim_{s \nearrow t} N(s)$ 存在.

对于计数过程 $\{N(t)\}$, 用 $N(s, t]$ 表示区间 $(s, t]$ 内发生的事件数, 则有

$$N(s, t] = N(t) - N(s), \quad s < t.$$

如果在互不相交的时间段内发生时间的个数是相互独立的, 严格地说是指对任何正整数 n 以及

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

随机变量

$$N(0), N(0, t_1], N(t_1, t_2], \cdots, N(t_{n-1}, t_n]$$

相互独立, 那么相应的计数过程 $\{N(t)\}$ 具有独立增量性.

如果在长度相等的时间段内, 事件发生个数的概率分布是相同的, 即指对任意 $s > 0, t_2 > t_1 \geq 0$, 随机变量 $N(t_1, t_2]$ 与 $N(t_1 + s, t_2 + s]$ 同分布, 则计数过程具有平稳增量过程.

- 1 Poisson 分布
- 2 计数过程
- 3 Poisson 过程
- 4 泊松过程的基本性质
 - 泊松过程的数字特征
 - 泊松过程的联合分布
- 5 长时间的极限行为

定义 3.1

称满足下面条件的计数过程 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的 **Poisson 过程**:

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) $\{N(t)\}$ 是独立增量过程;
- (3) 对于任意 $t, s \geq 0$, $N(s, t+s)$ 服从参数为 λt 的泊松分布, 即

$$P(N(s, t+s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

其中的正常数 λ 称为泊松过程 $\{N(t)\}$ 的强度或速率.

上述定义中的 (3) 说明泊松过程是平稳增量过程, 而且时间段 $(s, s + t]$ 中发生的事件个数服从泊松分布.

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, 容易计算

$$E[N(t)] = \lambda t, \text{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

于是

$$\lambda = \frac{EN(t)}{t}$$

是单位时间内事件发生的平均数. λ 越大, 单位时间平均发生的事件越多. 这正是称 λ 为 Poisson 过程的强度的原因.

定义 3.2

我们称函数 f 当 $h \rightarrow 0$ 时是 $o(h)$ 的, 如果

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

定义 3.3

设 $\lambda > 0$ 是常数. 如果计数过程 $\{N(t)\}$ 满足以下条件, 则称它是强度为 λ 的泊松过程:

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) $N(t)$ 是独立增量过程, 有平稳增量性;
- (3) 当正数 $h \rightarrow 0$ 时有

$$\begin{cases} P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h), \\ P(N(h) \geq 2) = o(h). \end{cases}$$

注记 3.4

由上面定义中的 (3) 可以得出:

$$\begin{aligned}P(N(h) = 0) &= 1 - P(N(h) \geq 1) \\ &= 1 - P(N(h) = 1) - P(N(h) \geq 2) \\ &= 1 - \lambda h + o(h).\end{aligned}$$

定理 3.5

定义 3.1 和定义 3.3 等价.

证明.

首先我们由定义 3.3 推导定义 3.1. 设 $\{N(t)\}$ 满足定义 3.3, 只需证明 (3.1) 成立. 对确定的正数 t , 将区间 $(0, t]$ 进行 n 等分, 每段长为 t/n , 等分点是

$$t_j = \frac{jt}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

用 $Y_j = N(t_{j-1}, t_j]$ 表示第 j 个区间 $(t_{j-1}, t_j]$ 中的事件数, 则 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 独立同分布, 并且

$$P(Y_j \geq 2) = o(t_j - t_{j-1}) = o(t/n),$$

$$p_n \equiv P(Y_j = 1) = \lambda t/n + o(t/n),$$

$$q_n \equiv P(Y_j = 0) = 1 - P(Y_j \geq 1) = 1 - \lambda t/n + o(t/n).$$

证明.

对非负整数 k , 引入事件

$$A_n = \{\text{有 } k \text{ 个 } Y_j = 1, \text{ 其余的 } Y_j = 0; 1 \leq j \leq n\},$$

$$B_n = \left\{ \sum_{j=1}^n Y_j = k, \text{ 至少有一个 } Y_j \geq 2 \right\},$$

则有 $B_n \subset \bigcup_{j=1}^n \{Y_j \geq 2\}$, $A_n \cap B_n = \emptyset$.

证明.

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$P(B_n) \leq P\left(\bigcup_{j=1}^n \{Y_j \geq 2\}\right) \leq nP(Y_j \geq 2) = no(t/n) \rightarrow 0.$$

$$np_n = n(\lambda t/n + o(t/n)) \rightarrow \lambda t, \quad q_n \rightarrow 1,$$

$$\begin{aligned} q_n^n &= (1 - \lambda t/n + o(t/n))^n = \left(1 - \frac{\lambda t}{n} + o(t/n)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{o(t/n)}{1 - \lambda t/n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

证明.

所以利用 $\{N(0, t] = k\} = \{\sum_{j=1}^n Y_j = k\} = A_n \cup B_n$ 我们有

$$\begin{aligned} P(N(s, s + t] = k) &= P(N(0, t] = k) \\ &= P(A_n \cup B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [P(A_n) + P(B_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k q_n^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} [n(n-1) \cdots (n-k+1) p_n^k] q_n^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

证明.

接下来我们由定义 3.1 推导定义 3.3. 应用 Taylor 公式我们有

$$\begin{aligned}P(N(h) = 1) &= \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h(1 - \lambda h + o(h)) \\ &= \lambda h + o(h),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}P(N(h) \geq 2) &= 1 - P(N(h) = 0) - P(N(h) = 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} \\ &= 1 - [1 - \lambda h + o(h)] - [\lambda h + o(h)] \\ &= o(h).\end{aligned}$$



我们也可以利用建立微分方程的方法来由定义 3.3 推导定义 3.1. 记

$$P_n(t) = P(N(t) = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$P(h) = P(N(h) \geq 1) = P_1(h) + P_2(h) + \dots = 1 - P_0(h), \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P(N(t+h) = 0) \\ &= P(N(t+h) - N(t) = 0, N(t) = 0) \\ &= P(N(t) = 0)P(N(t+h) - N(t) = 0) \\ &= P_0(t)P_0(h) \\ &= P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

令 $h \rightarrow 0$, 我们有 $P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$. 解此微分方程, 我们有 $P_0(t) = Ke^{-\lambda t}$, 其中 K 为常数. 由 $P_0(0) = P(N(0) = 0) = 1$ 我们有 $K = 1$, 所以

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

类似地, 当 $n \geq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P(N(t+h) = n) \\ &= P(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0) \\ &\quad + P(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1) \\ &\quad + P(N(t+h) = n, N(t+h) - N(t) \geq 2) \\ &= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) \\ &= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h), \end{aligned}$$

于是

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

令 $h \rightarrow 0$, 我们有

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t).$$

于是 $e^{\lambda t}[P'_n(t) + \lambda P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$, 即

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t).$$

- 下面应用数学归纳法来证明 $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.
- 当 $n = 1$ 时, $\frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_1(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda$, 且有 $P_1(0) = 0$, 求解微分方程可得 $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.
- 进一步, 假设 $P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ 成立, 则有

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!},$$

并且 $P_n(0) = 0$.

- 求解微分方程可得 $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

由条件 (2) 我们知该计数过程具有平稳独立增量, 故对一切 $s \geq 0$ 以及 $t > 0$, 均有

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = P(N(t) = n) = P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

于是 (3.1) 成立.

- 1 Poisson 分布
- 2 计数过程
- 3 Poisson 过程
- 4 泊松过程的基本性质**
 - 泊松过程的数字特征
 - 泊松过程的联合分布
- 5 长时间的极限行为

首先由泊松随机变量的数字特征可以看出, 对任意 $t > 0$,

$$EN(t) = \lambda t, \quad \text{Var}(N(t)) = \lambda t,$$

$$E[N(t)(N(t) - 1) \cdots (N(t) - k + 1)] = (\lambda t)^k.$$

另外, 特征函数为

$$Ee^{ixN(t)} = e^{\lambda t(e^{ix} - 1)}.$$

对任意 $s < t$, $N(s)$ 和 $N(t)$ 的自相关系数和自协方差函数可以如下计算:

$$\begin{aligned}
 E(N(s)N(t)) &= E[N(s)(N(s) + N(t) - N(s))] \\
 &= E[N(s)^2] + E[N(s)(N(t) - N(s))] \\
 &= E[N(s)^2] + E[N(s)]E[N(t) - N(s)] \quad (\text{独立增量性}) \\
 &= E[N(s)^2] + E[N(s)]E[N(t - s)] \quad (\text{平稳增量性}) \\
 &= (\lambda s)^2 + \lambda s + \lambda^2 s(t - s) \\
 &= \lambda^2 st + \lambda s.
 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(N(s), N(t)) = E[N(s)N(t)] - E[N(s)]E[N(t)] = \lambda s.$$

下面我们计算泊松过程的联合分布. 任意给定 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ 和 $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$,

$$\begin{aligned} & P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2, \cdots, N(t_m) = k_m) \\ &= P(N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1, \cdots, N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m - k_{m-1}) \\ &= P(N(t_1) = k_1) P(N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1) \cdots P(N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m - k_{m-1}) \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} \cdots \frac{[\lambda(t_m - t_{m-1})]^{k_m - k_{m-1}}}{(k_m - k_{m-1})!} e^{-\lambda t_m}. \end{aligned}$$

有了联合分布，就可以计算条件分布. 假设 $s < t$ ，在给定 $N(s) = k$ 的条件下，

$$\begin{aligned} P(N(t) = m | N(s) = k) &= \frac{P(N(s) = k, N(t) = m)}{P(N(s) = k)} \\ &= \frac{[\lambda(t-s)]^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad \forall m \geq k. \end{aligned}$$

类似地，假设 $s < t$ ，在给定 $N(t) = m$ 的条件下，

$$\begin{aligned} P(N(s) = k | N(t) = m) &= \frac{P(N(s) = k, N(t) = m)}{P(N(t) = m)} \\ &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{m-k}, \quad \forall k \leq m. \end{aligned}$$

- 1 Poisson 分布
- 2 计数过程
- 3 Poisson 过程
- 4 泊松过程的基本性质
 - 泊松过程的数字特征
 - 泊松过程的联合分布
- 5 长时间的极限行为

设 $(N_t : t \geq 0)$ 是以 $\alpha > 0$ 为参数的 Poisson 过程.

定理 5.1

当 $t \rightarrow \infty$ 时几乎必然地有 $N_t/t \rightarrow \alpha$.

证明.

记 $\xi_k := N_k - N_{k-1}$, 则 $\{\xi_k\}$ 是独立同分布随机变量序列且服从参数为 α 的 Poisson 分布. 注意 $N_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ 且 $\mathbf{E}(\xi_k) = \mathbf{Var}(\xi_k) = \alpha$. 由强大数定律, 当 $n \rightarrow \infty$ 时几乎必然地有 $N_n/n \rightarrow \alpha$. 注意

$$\frac{\lfloor t \rfloor}{t} \frac{N_{\lfloor t \rfloor}}{\lfloor t \rfloor} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{t} \frac{N_{\lfloor t \rfloor + 1}}{\lfloor t \rfloor + 1}.$$

注意到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{t} = 1.$$

所以当 $t \rightarrow \infty$ 时几乎必然地有 $N_t/t \rightarrow \alpha$. □

定理 5.2

对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$\mathbf{P}\left(\frac{N_{\alpha t} - \alpha t}{\sqrt{\alpha t}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

证明.

令 $\xi_k := N_k - N_{k-1}$, 对 $\{\xi_k\}$ 应用中心极限定理, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\mathbf{P}\left(\frac{N_n - \alpha n}{\sqrt{\alpha n}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x).$$

注意

$$\frac{N_t - \alpha t}{\sqrt{\alpha t}} = \frac{N_t - N_{t-[t]} - \alpha[t]}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{N_{t-[t]} - \alpha(t - [t])}{\sqrt{\alpha t}},$$

其中 $N_t - N_{t-[t]}$ 与 $N_{[t]}$ 同分布. 所以由我们知当 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$\mathbf{P}\left(\frac{N_t - N_{t-[t]} - \alpha[t]}{\sqrt{\alpha[t]}} \leq x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{N_{[t]} - \alpha[t]}{\sqrt{\alpha[t]}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x),$$

证明.

进而

$$\mathbf{P}\left(\frac{N_t - N_{t-[t]} - \alpha[t]}{\sqrt{\alpha[t]}} \leq \varepsilon\right) \rightarrow \Phi(x).$$

再注意到当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\left|\frac{N_{t-[t]} - \alpha(t - [t])}{\sqrt{\alpha t}}\right| \leq \frac{N_1 + \alpha}{\sqrt{\alpha t}} \rightarrow 0, \text{ a.s..}$$

所以结论成立. □

推论 5.3

对于任意 $s, x > 0$, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时有

$$e^{-\lambda s} \sum_{k \leq \lambda x} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \rightarrow 1_{\{0 < s < x\}} + \frac{1}{2} 1_{\{s=x\}}.$$

证明.

设 $(N_t : t \geq 0)$ 是以 1 为参数的泊松过程. 则欲证结果等价于, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 有

$$P(N_{\lambda s} \leq \lambda x) = P\left(\frac{N_{\lambda s} - \lambda s}{\sqrt{\lambda s}} \leq \frac{\sqrt{\lambda}(x - s)}{\sqrt{s}}\right) \rightarrow 1_{\{0 \leq s < x\}} + \frac{1}{2}1_{\{s=x\}}.$$

由定理 5.2 知上式成立. □