

第 5 讲 Poisson 呼叫流

- 1 泊松呼叫流
- 2 呼叫流的概率分布
- 3 等待间隔 X_n 的分布
- 4 到达时刻的条件分布
- 5 简单呼叫流

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程. 定义 $S_0 = 0$. 用 S_n 表示第 n 个事件发生的时刻, 简称为第 n 个到达时或第 n 个呼叫时. 由于呼叫时 S_1, S_2, \dots 依次到达, 所以又称 $\{S_j\}$ 是 Poisson 过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流.

设 $\{S_j\}$ 是 Poisson 过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流. 我们不难看出事件 $\{N(t) \geq n\}$ 和 $\{S_n \leq t\}$ 都表示 $[0, t]$ 内至少有 n 个呼叫, $\{N(t) = n\}$ 和 $\{S_n \leq t < S_{n+1}\}$ 都表示 $[0, t]$ 内恰有 n 个呼叫. 于是

$$\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}, \quad (1.1)$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}.$$

例 1.1

设 $\{S_j\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流. 对于 $s_1 < s_2 < \dots$ 以及 $i = 1, 2, \dots$, 定义

$$A_i = \{N(s_{i-1}, s_i) = 0\},$$

$$B_i = \{N(s_{i-1}, s_i) = 2\},$$

则 $A_1, B_2, A_3, B_4, \dots$ 相互独立, 并且我们有

$$\{S_1 > s_1\} = \{N(s_0, s_1) = 0\} = A_1,$$

$$\{S_1 > s_1, S_2 \leq s_2\} = A_1 \{N(s_1, s_2) \geq 2\},$$

$$\{S_1 > s_1, S_2 \leq s_2, S_3 > s_3\} = A_1 B_2 \{N(s_2, s_3) = 0\} = A_1 B_2 A_3,$$

.....

$$\{S_1 > s_1, S_2 \leq s_2, \dots, S_{2k-1} > s_{2k-1}\} = A_1 B_2 \dots B_{2k-2} A_{2k-1},$$

以及

$$P(A_i) = \exp(-\lambda(s_i - s_{i-1})),$$

$$P(B_i) = \frac{\lambda^2(s_i - s_{i-1})^2}{2} \exp(-\lambda(s_i - s_{i-1})).$$

- 1 泊松呼叫流
- 2 呼叫流的概率分布
- 3 等待间隔 X_n 的分布
- 4 到达时刻的条件分布
- 5 简单呼叫流

先计算 S_n 的密度函数. 首先由 (1.1) 我们可以得到 S_n 的分布函数

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n) \\ &= 1 - P(N(t) < n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

函数 $F_n(t)$ 连续, 在 $(0, \infty)$ 中可导, 求导数得到 S_n 的密度函数

$$\begin{aligned} f_n(t) &= F'_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \lambda e^{-\lambda t} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

于是 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ 服从参数为 n, λ 的 *Gamma* 分布.

为了得到 (S_1, S_2, \dots, S_n) 的联合密度, 先做一些准备. 设
 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $G(x, y) = P(X > x, Y \leq y)$, 则由

$$G(x, y) = P(Y \leq y) - F(x, y)$$

我们知在混合偏导数存在的地方有

$$\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} [P(Y \leq y) - F(x, y)] = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

一般地, 我们有如下引理.

引理 2.1

设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合分布函数,

$$G_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_{2k-1} > x_{2k-1}, \\ X_j \leq x_j, 2k \leq j \leq n).$$

则在 G_k 存在 n 阶连续混合偏导数的区域内, F 存在 n 阶连续混合偏导数, 并且

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_{n-1} \cdots \partial x_1} = (-1)^k \frac{\partial^n G_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n \partial x_{n-1} \cdots \partial x_1}.$$

证明.

对 k 作归纳法. 容易验证当 $k = 1$ 时结论成立. 设上式对于 k 成立, 由

$$\{X_{2k+1} > x_{2k+1}\} = \{X_{2k+1} > -\infty\} - \{X_{2k+1} \leq x_{2k+1}\}$$

我们有

$$\begin{aligned} & G_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= P(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_{2k+1} > x_{2k+1}, X_j \leq x_j, 2k+2 \leq j \leq n) \\ &= P(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_{2k+1} > -\infty, X_j \leq x_j, 2k+2 \leq j \leq n) \\ &\quad - G_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

上式两边先对 x_{2k+1} 求偏导数, 然后对其它的 x_j 求偏导数, 交换求导数的次序后得到所求等式对 $k+1$ 成立. □

定理 2.2

设随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 有联合分布函数 $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $F(\mathbf{x})$ 在 \mathbb{R}^n 的开区域 D 中有连续的 n 阶混合偏导数. 定义

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\partial^n F(\mathbf{x})}{\partial x_n \cdots \partial x_2 \partial x_1}, & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

若下面的条件 (a), (b) 之一成立:

(a) $P(\mathbf{X} \in D) = 1$;

(b) $\int_D f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1$.

则 $f(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{X} 的联合密度.

下面讨论 (s_1, s_2, \dots, s_n) 的联合分布. 设 $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$, 我们将利用例 1.1 的符号和结论. 对 $n = 2k - 1$,

$$\begin{aligned} & G(s_1, s_2, \dots, s_n) \\ &= P(S_1 > s_1, S_2 \leq s_2, S_3 > s_3, \dots, S_{n-1} \leq s_{n-1}, S_n > s_n) \\ &= P(A_1 B_2 \cdots B_{n-1} A_n) \\ &= P(A_1) P(B_2) \cdots P(B_{n-1}) P(A_n) \\ &= e^{-\lambda s_1} \frac{(\lambda(s_2 - s_1))^2}{2} e^{-\lambda(s_2 - s_1)} e^{-\lambda(s_3 - s_2)} \cdots \\ & \quad \cdot \frac{(\lambda(s_{n-1} - s_{n-2}))^2}{2} e^{-\lambda(s_{n-1} - s_{n-2})} e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} \\ &= \lambda^{n-1} \frac{(s_2 - s_1)^2 (s_4 - s_3)^2 \cdots (s_{n-1} - s_{n-2})^2}{2^{k-1}} e^{-\lambda s_n}. \end{aligned}$$

于是 $G(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 在开区域 $D = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) | 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n\}$ 中连续, 并有连续的 n 阶混合偏导数

$$\begin{aligned} g(s_1, s_2, \dots, s_n) &= (-1)^k \frac{\partial^n G(s_1, s_2, \dots, s_n)}{\partial s_n \partial s_{n-1} \cdots \partial s_1} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda s_n}, \quad (s_1, s_2, \dots, s_n) \in D. \end{aligned}$$

由于 $P((S_1, S_2, \dots, S_n) \in D) = 1$, 所以由引理 2.1 和定理 2.2 我们知 $g(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 是 (S_1, S_2, \dots, S_n) 的联合密度.

对于 $n = 2k$ 可以通过类似的推导得到相应的结果. 对 $n = 2k$, 我们有

$$\begin{aligned} & G(s_1, s_2, \dots, s_n) \\ &= P(S_1 > s_1, S_2 \leq s_2, S_3 > s_3, \dots, S_{n-1} > s_{n-1}, S_n \leq s_n) \\ &= P(A_1 B_2 \cdots B_{n-2} A_{n-1} \{N(s_{n-1}, s_N] \geq 2\}) \\ &= P(A_1) P(B_2) \cdots P(B_{n-2}) P(A_{n-1}) P(\{N(s_{n-1}, s_N] \geq 2\}) \\ &= \lambda^{n-2} \frac{(s_2 - s_1)^2 (s_4 - s_3)^2 \cdots (s_{n-2} - s_{n-3})^2}{2^{k-1}} e^{-\lambda s_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^j (s_n - s_{n-1})^j}{j!}. \end{aligned}$$

于是和前面类似的讨论我们知 $G(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 在开区域 $D = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) | 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n\}$ 中连续, 并有连续的 n 阶混合偏导数

$$\begin{aligned} & g(s_1, s_2, \dots, s_n) \\ &= (-1)^k \frac{\partial^n G(s_1, s_2, \dots, s_n)}{\partial s_n \partial s_{n-1} \cdots \partial s_1} \\ &= \lambda^{n-2} \frac{-\partial(e^{-\lambda s_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^j (s_n - s_{n-1})^j}{j!})}{\partial s_{n-1} \partial s_n} \\ &= \lambda^{n-2} \frac{\partial(e^{-\lambda s_n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\lambda^j (s_n - s_{n-1})^{j-1}}{(j-1)!})}{\partial s_n} \\ &= \lambda^{n-1} \frac{\partial(e^{-\lambda s_n} (e^{\lambda(s_n - s_{n-1})} - 1))}{\partial s_n} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda s_n}, (s_1, s_2, \dots, s_n) \in D. \end{aligned}$$

由于 $P((S_1, S_2, \dots, S_n) \in D) = 1$, 所以由引理 2.1 和定理 2.2 我们知 $g(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 是 (S_1, S_2, \dots, S_n) 的联合密度.

定理 2.3

设 $\{S_j\}$ 是强度为 λ 的泊松过程的呼叫流, 则对 $n \geq 1$,

(1) (S_1, S_2, \dots, S_n) 有联合密度

$$g(s_1, s_2, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n;$$

(2) S_n 服从 $\Gamma(n, \lambda)$ 分布, 有密度函数

$$g_n(s) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\lambda s}, \quad s \geq 0.$$

- 1 泊松呼叫流
- 2 呼叫流的概率分布
- 3 等待间隔 X_n 的分布
- 4 到达时刻的条件分布
- 5 简单呼叫流

等待间隔 X_n 的分布

设 $\{S_n\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流, 我们记

$$X_n = S_n - S_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 X_n 是 $n - 1$ 个事件发生后, 等待第 n 个事件发生的等待间隔, 称为第 n 个等待间隔.

对于随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$. 定义 $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$. 以后用 $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x})$ 表示 \mathbf{X} 有联合密度 $f(\mathbf{x})$, 用 $\mathbf{Y} \sim g(\mathbf{y})$ 表示 \mathbf{Y} 有联合密度 $g(\mathbf{y})$.

定理 3.1

设 $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x})$, 则

(1) X_j 有密度函数

$$f_j(x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n,$$

并且 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立的充分必要条件是

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;$$

(2) 当 $Y \sim g(y)$ 时, \mathbf{X} 和 Y 相互独立的充分必要条件是

$$(\mathbf{X}, Y) \sim f(\mathbf{x})g(y);$$

(3) 当 \mathbf{X}, Y 都是离散随机向量时, \mathbf{X} 和 Y 相互独立的充分必要条件是对所有的 \mathbf{x}, \mathbf{y} , 有

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}, Y = \mathbf{y}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x})P(Y = \mathbf{y}).$$

引理 3.2

设 $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ 有联合密度 $g(x)$, $X = (u_1(S), u_2(S), \dots, u_n(S))$ 是 S 的函数, D 是 \mathbb{R}^n 的区域使得 $P(X \in D) = 1$. 如果有 D 上的 n 维向量值函数 $s(x)$, 使得

- (a) 对 $x \in D$, 有 $\{X = x\} = \{S = s(x)\}$;
- (b) $s(x)$ 是 D 到其值域的可逆映射, 偏导数连续, 雅可比行列式的绝对值

$$\left| \frac{\partial s}{\partial x} \right| \neq 0, \quad x \in D, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

则 X 有联合密度

$$f(x) = \begin{cases} g(s(x)) \left| \frac{\partial s}{\partial x} \right|, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

定理 3.3

泊松过程 $\{N(t)\}$ 的等待间隔 X_1, X_2, \dots 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的相互独立的随机变量.

定理 3.4

泊松过程 $\{N(t)\}$ 的等待间隔 X_1, X_2, \dots 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的相互独立的随机变量.

证明.

由于 (S_1, S_2, \dots, S_n) 是连续型随机向量, 所以 $X_j = S_j - S_{j-1}$ 是连续型随机变量, 满足 $P(X_j > 0) = 1$. 引入

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$S = (S_1, S_2, \dots, S_n), \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n),$$

$$D = \{\mathbf{x} | x_j > 0, 1 \leq j \leq n\},$$

我们有 $P(\mathbf{X} \in D) = 1$.

证明.

对于 $\mathbf{x} \in D$ 以及 $s_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j, 1 \leq j \leq n$, 有

(a) $\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} = \{\mathbf{S} = \mathbf{s}\};$

(b) $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x})$ 是 D 到值域 $A_n = \{s | 0 < s_1 < \cdots < s_n\}$ 的可逆映射, 偏导数连续并满足

$$\left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \right| = 1, \mathbf{x} \in D,$$

根据引理 3.2 得到 \mathbf{X} 的联合密度

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{s}) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} = \lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)} \\ &= \prod_{j=1}^n \lambda e^{-\lambda x_j} = \prod_{j=1}^n f_j(x_j), \mathbf{x} \in D, \end{aligned}$$

其中 $f_j(x_j) = \lambda e^{-\lambda x_j} (x_j > 0)$ 是 X_j 的边缘密度. 再由定理 3.1 我们知它们相互独立. □

- 1 泊松呼叫流
- 2 呼叫流的概率分布
- 3 等待间隔 X_n 的分布
- 4 到达时刻的条件分布
- 5 简单呼叫流

用 $N(t)$ 表示放射物 V 在 t 秒内释放的 α 粒子数. 设 $\{N(t)\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程. 已知 $N(t) = 1$ 时, S_1 是这个 α 粒子的释放时刻. 对 $s \in (0, t)$, 有

$$\begin{aligned} P(S_1 \leq s | N(t) = 1) &= P(N(s) \geq 1 | N(t) = 1) \\ &= \frac{P(N(s) = 1, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

这说明已知 $(0, t]$ 内有一个粒子释放出来的条件下, 释放时刻 S_1 在 $[0, t]$ 中均匀分布.

已知 $N(t) = n$ 时, 设想把 V 瓜分成 m 块, 每个小块在 $(0, t]$ 内至多释放出一个粒子. 显然 $m \geq n$. 根据上面分析, 已知第 i 个小块在 $(0, t]$ 内释放粒子的条件下, 这个粒子的释放时间在 $[0, t]$ 内均匀分布, 并且无论哪 n 个小块释放粒子, 这 n 个释放时间是相互独立的. 现在用 U_1, U_2, \dots, U_n 表示这 n 个释放时间, 则 U_1, U_2, \dots, U_n 独立同分布且在 $[0, t]$ 内均匀分布, 其次序统计量 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$ 等于已知 $N(t) = n$ 时的 (S_1, S_2, \dots, S_n) , 记做

$$(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}) = (S_1, S_2, \dots, S_n) | N(t) = n.$$

对于事件 A 和随机向量 S, U , 这里和以后用 $U = S | A$ 表示 U 等于已知 A 发生后的 S .

对于一般的泊松过程 $\{N(t)\}$, 可以把 $N(t)$ 设想成某块放射物在 $(0, t]$ 内释放的粒子数. 上面分析说明在条件 $N(t) = n$ 下, $[0, t]$ 中的这 n 个事件的发生时刻, 在不考虑先后次序时, 是独立同分布且在 $[0, t]$ 中均匀分布的. 下面是具体的数学推导.

对于 $n = 1, 2, \dots$, 引入

$$\mathbf{s}_n = (s_1, s_2, \dots, s_n), \quad A_n = \{\mathbf{s}_n | 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < t\}.$$

定理 4.1

在条件 $N(t) = n (> 0)$ 下, $\mathbf{S}_n = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ 有联合密度

$$h_n(\mathbf{s}_n) = \frac{n!}{t^n}, s_n \in A_n.$$

证明.

由定理 2.3 知道 $S_{n+1} = (S_1, S_2, \dots, S_{n+1})$ 有联合密度函数

$$g_{n+1}(s_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n+1}.$$

对于 $s_n \in A_n$, 我们得到条件分布函数

$$\begin{aligned} H_n(s_n) &= P(S_j \leq s_j, 1 \leq j \leq n | N(t) = n) \\ &= \frac{1}{P(N(t) = n)} P(S_j \leq s_j, 1 \leq j \leq n; N(t) = n) \\ &= \frac{1}{P(N(t) = n)} P(S_j \leq s_j, 1 \leq j \leq n; S_n \leq t, S_{n+1} > t) \\ &= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} P(S_j \leq s_j, 1 \leq j \leq n; S_{n+1} > t) \\ &= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \dots \int_0^{s_n} \int_t^\infty g_{n+1}(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) dt_{n+1} dt_n \dots dt_1. \end{aligned}$$

证明.

$H_n(\mathbf{s}_n)$ 在 A_n 上有连续的 n 阶混合偏导数. 由 $P(S_n \in A_n | N(t) = n) = 1$ 以及定理 2.2 知道对 $H_n(\mathbf{s}_n)$ 依次求偏导得到 $\mathbf{S}_n = (S_1, \dots, S_n)$ 的条件联合密度

$$\begin{aligned} h_n(\mathbf{s}_n) &= \frac{\partial^n H_n(\mathbf{s}_n)}{\partial s_n \cdots \partial s_2 \partial s_1} \\ &= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \int_t^\infty g_{n+1}(s_1, s_2, \dots, s_n, t_{n+1}) dt_{n+1} \\ &= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \int_t^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} \\ &= \frac{n!}{t^n} e^{\lambda t} \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t. \end{aligned}$$

从而得证. □

现设 U 在 $[0, t]$ 上均匀分布, U_1, U_2, \dots, U_n 是来自总体 U 的随机变量, 则他们的从小到大次序统计量 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$ 有联合密度

$$h_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < t.$$

所以已知 $[0, t]$ 内有 n 个事件发生的条件下, 以 V_1, V_2, \dots, V_n 表示这 n 个时间的发生时刻时, V_1, V_2, \dots, V_n 的次序统计量 (S_1, S_2, \dots, S_n) 与 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$ 同分布.

据此我们说在条件 $N(t) = n$ 下, 不考虑先后次序时, $[0, t]$ 中的这 n 个事件的发生时刻 V_1, \dots, V_n 是独立同分布的且在 $[0, t]$ 中是均匀分布的, 或者称这 n 个发生时刻是在 $[0, t]$ 中均匀混乱的.

设 X, Y 是随机变量, A 是随机事件. 如果在 A 发生的条件下, X 的条件分布与 Y 的分布相同, 即 $P(X \leq x|A) = P(Y \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, 则称 $X|A$ 和 Y 同分布. 所以 $(S_1, \dots, S_n)|N(t) = n$ 和 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$ 同分布.

推论 4.2

设 $U \sim U[0, t]$, U_1, U_2, \dots, U_n 是来自总体 U 的随机变量, $h(s)$ 是实值 (可测) 函数, 则

- (1) $\sum_{i=1}^n S_i|N(t) = n$ 和 $\sum_{i=1}^n U_i$ 同分布;
- (2) $\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t) = n$ 和 $\sum_{i=1}^n h(U_i)$ 同分布;
- (3) 当 $Eh(U)$ 存在时, $E(\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t) = n) = nEh(U)$.

证明.

- (1) 因为 $(S_1, S_2, \dots, S_n) | N(t) = n$ 和 $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$ 同分布, 所以 $\sum_{i=1}^n S_i | N(t) = n$ 和 $\sum_{i=1}^n U_i$ 同分布;
- (2) 同理得 $\sum_{i=1}^n h(S_i) | N(t) = n$ 和 $\sum_{i=1}^n h(U_i) = \sum_{i=1}^n h(U_{(i)})$ 同分布;
- (3) 同分布的随机变量有相同的数学期望, 所以有

$$E\left(\sum_{i=1}^n h(S_i) | N(t) = n\right) = \sum_{i=1}^n E[h(U_i)] = nEh(U). \quad \square$$

对常数 a , 在上面例子中还容易计算出

$$Ee^{aU} = \frac{1}{t} \int_0^t e^{as} ds = \frac{1}{at} (e^{at} - 1).$$

- 1 泊松呼叫流
- 2 呼叫流的概率分布
- 3 等待间隔 X_n 的分布
- 4 到达时刻的条件分布
- 5 简单呼叫流

如果 $\{Y_j\}$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量, 就称

$$\xi_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

是简单呼叫流. 定理 3.3 说明泊松过程的呼叫流 $\{S_n\}$ 是简单呼叫流. 简单呼叫流又称为泊松流.

设 $\{\xi_n\}$ 是简单呼叫流, 认为每个呼叫时刻 ξ_n 有一个事件 (呼叫) 发生, 相应的计数过程记做 $\{M(t)\}$. 下面说明 $\{M(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程. 由于 $M(t) = m$ 的充分必要条件是恰有 m 个 $\{\xi_j \leq t\}$ 发生, 于是可以用简单呼叫流 $\{\xi_n\}$ 将计数过程 $\{M(t)\}$ 表达出来:

$$M(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I[\xi_j \leq t], \quad t \in [0, \infty).$$

这里 $I[A]$ 是事件 A 的示性函数.

对于强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 及其呼叫流 $\{S_n\}$, 也有

$$N(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I[S_j \leq t], \quad t \in [0, \infty).$$

由 $\{\xi_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 同分布知道对 $n \geq 1$ 和 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$(M(t_1), M(t_2), \cdots, M(t_n))$ 与 $(N(t_1), N(t_2), \cdots, N(t_n))$

同分布. 从而我们知 $\{M(t)\}$ 也是强度为 λ 的泊松过程.

注记 5.1

所以, 我们有如下给出泊松过程的第三种定义: 泊松过程是简单呼叫流所对应的计数过程.

例 5.2

汽车按照强度为 λ 的泊松流通过广场, 第 i 辆汽车通过时造成的空气污染为 D_i . 污染随着时间减弱, 经过时间 s 减弱为 $D_i e^{-as}$, 其中正常数 a 称为扩散常数. 假设 D_1, D_2, \dots 是来自总体 D 的随机变量, 且与泊松流独立. 计算 $[0, t]$ 内通过的汽车在 t 时造成的平均污染 (即造成的污染的期望值).

解.

用 $\{N(t)\}$ 表示所述的泊松过程, 用 S_i 表示第 i 辆汽车的通过时间. $[0, t]$ 内通过了 $N(t)$ 辆汽车, 造成 t 时的污染是

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-a(t-S_i)}.$$

注意由假设 D_i 与 $N(t), S_i$ 独立. 利用推论 4.2 的结论得到

证明.

$$\begin{aligned} E(D(t)|N(t) = n) &= \sum_{i=1}^n E(D_i e^{-a(t-S_i)} | N(t) = n) \\ &= \sum_{i=1}^n E(D_i e^{-at}) E(a^{aS_i} | N(t) = n) \\ &= E(D e^{-at}) E\left(\sum_{i=1}^n a^{aS_i} | N(t) = n\right) \\ &= E(D e^{-at}) E \sum_{i=1}^n e^{aU_i} \\ &= E D e^{-at} \frac{n}{at} (e^{at} - 1) \\ &= \frac{n E D}{at} (1 - e^{-at}). \end{aligned}$$

证明.

于是

$$E(D(t)|N(t)) = \frac{N(t)ED}{at}(1 - e^{-at}).$$

最后得到

$$E(D(t)) = \frac{E(N(t))E(D)}{at}(1 - e^{-at}) = \frac{\lambda E(D)}{a}(1 - e^{-\lambda t}). \quad \square$$

- 容易看出, $E[D(t)]$ 和强度 λ 以及单辆汽车的平均污染 $E[D]$ 成正比.
- 因为 $D(t)$ 关于 a 递减, 所以 $E[D(t)]$ 也是 a 的减函数.
- 扩散常数越大, 平均污染 $E[D(t)]$ 越小.
- 当时间 t 充分大后, 空气污染就稳定在 $\lambda E[D]/a$ 附近.