第 7 讲 泊松过程的推广

1. 复合 Poisson 过程
2. 条件 (混和) 泊松过程
3. 非时齐泊松过程

例 1.1

某零件在运行过程中受到撞击. 用 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间段内该零件受到的撞击次数，经验表明 $\mathbf{N}=(N(t),t\geq 0)$ 是参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程. 每次撞击会给零件带来一定的磨损，其磨损量大小是随机的，分布函数为 $G(x)$. 假设各次磨损量为 $\xi_1,\xi_2,\cdots$，具有分布函数 $G(x)$，并且相互独立. 一个基本问题是：$(0,t]$ 内该零件的磨损总量是多少?

这个数至关重要，它直接影响零件的使用寿命，决定什么时候需要更换零件. 根据上述假设，$(0,t]$ 内磨损总量为

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i.$$

我们再来看一个例子. 我们再来看一个例子. 讨论旅客按强度为 λ 的泊松过程到达长途汽车站时, 我们把相约的到达视为一次到达. 如果第 i 次到达的旅客数是 Z_i 时, $[0,t]$ 内到达了多少旅客呢?

如果已知 $[0,t]$ 内有 $N(t)=n$ 次到达，则 $[0,t]$ 内到达的旅客数是 $\sum_{j=1}^{n} Z_j$. 当 $[0,t]$ 内有 $N(t)$ 次到达，则 $[0,t]$ 内到达的旅客数为

$$M(t)=\sum_{j=1}^{N(t)} Z_j \tag{1.1}$$

为复合泊松过程. 记 $E[M(t)]$ 为 $[0,t]$ 内平均到达的旅客数，$\mathrm{Var}[M(t)]$ 为 $[0,t]$ 内到达的旅客数的方差.

已知 $N(t)=n$ 时，$M(t)$ 有条件数学期望

$$E[M(t)|N(t)=n]=E[\sum_{j=1}^{n}Z_j|N(t)=n]=E[\sum_{j=1}^{n}Z_j]=nE[Z_j]=n\mu.$$

于是得到 $E[M(t)|N(t)]=N(t)\mu$. 再求数学期望得到

$$E[M(t)]=E[E[M(t)|N(t)]]=E[N(t)]\mu=\lambda t\mu.$$

$M(t)^2$ 有条件数学期望

$$
\begin{aligned}
E[M^2(t)|N(t)=n] &= E[(\sum_{j=1}^{n} Z_j)^2|N(t)=n] = E[(\sum_{j=1}^{n} Z_j)^2] \\
&= \mathsf{Var}[\sum_{j=1}^{n} Z_j] + (E[\sum_{j=1}^{n} Z_j])^2 \\
&= n\sigma^2 + (n\mu)^2.
\end{aligned}
$$

所以有

$$
E[M^2(t)|N(t)] = N(t)\sigma^2 + N^2(t)\mu^2.
$$

两边再求数学期望，利用 $E[N(t)] = \text{Var}[N(t)] = \lambda t$，$E[N^2(t)] = \lambda t + (\lambda t)^2$，我们有

$$E[M^2(t)] = E[N(t)]\sigma^2 + E[N^2(t)]\mu^2 = \lambda t\sigma^2 + [\lambda t + (\lambda t)^2]\mu^2.$$

最后得到

$$\text{Var}[M(t)] = E[M^2(t)] - (E[M(t)])^2 = \lambda t\sigma^2 + \lambda t\mu^2.$$

定理 1.2

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，$\{Z_j\}$ 是相互独立的随机序列，有共同的数学期望 $\mu = E[Z_j]$ 和方差 $\sigma^2 = \mathrm{Var}[Z_j]$，并且和 $\{N(t)\}$ 独立，复合泊松过程 $\{M(t)\}$ 由 (1.1) 定义，则

(1) $E[M(t)] = \lambda t \mu$;

(2) 当 $\sigma^2 < \infty$ 时，$\mathrm{Var}[M(t)] = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$.

例 1.3

假定在股票交易市场，股票交易次数是以 λ 为速率的 Poisson 过程. 记第 k 次与第 $k-1$ 次易手前后股票价格的变化为 Y_k. 不妨假定 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量且与 $N(t)$ 独立，而 $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ 则代表时刻 t 时股票的总价格变化. 设 Y_1 的分布为 $G(y)$，则

$$P(Y_1+Y_2 \leq y)=\int_{-\infty}^{\infty} G(y-z) dG(z),$$

称为 G 与 G 自身的卷积，记为 $G*G(y)$ 或 $G^{(2)}(y)$. 类似地，$G^{(n)}(y) = G*\cdots*G(y)$, 称为 G 自身的 n 重卷积. 有了上面的记号，我们不难求出 $X(t)$

的分布：

$$
\begin{aligned}
P(X(t) \leq x) &= P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \leq x | N(t) = n) P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n} Y_k \leq x) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G^{(n)}(x).
\end{aligned}
$$

例 1.4: (例 1.1 续)

假设各次磨损量和撞击次数相互独立，并且每次磨损量是参数为 $\beta > 0$ 的指数随机变量. 根据零件设计标准，如果磨损总量大于 $\alpha > 0$，那么需要更换零件；否则影响安全运行，求该零件的平均寿命.

解.

令 η 为零件的寿命，它是随机变量. 对任意 $t>0$，

$$\eta > t \Leftrightarrow Z(t) \leq \alpha.$$

所以

$$P(\eta > t) = P(Z(t) \leq \alpha).$$

由分部积分公式得

$$\begin{aligned} E\eta &= \int_0^\infty P(\eta > t)dt \\ &= \int_0^\infty P(Z(t) \leq \alpha)dt \\ &= \int_0^\infty P(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \leq \alpha)dt. \end{aligned}$$

解.

由于 $\mathbf{N} = (N(t), t \geq 0)$ 和 $(\xi_n, n \geq 1)$ 相互独立，根据全概率公式

$$P\Big(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \leq \alpha\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq \alpha\Big) P(N(t) = n).$$

令

$$\tilde{N}(t) = \max\Big\{n \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t\Big\},$$

$(\tilde{N}(t), t \geq 0)$ 是参数为 $\beta > 0$ 的 Poisson 过程. 特别，

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq \alpha\Big) = P(\tilde{N}(\alpha) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta}.$$

解.

我们有

$$
\begin{aligned}
E\eta &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=k}^\infty (k+1) \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \\
&= \frac{1+\alpha\beta}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

□

- 令 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个计数过程, 其如下定义.
- 设 L 是一个正值随机变量, 在 $L = \lambda$ 的条件下, $N(t)$ 是一个强度为 λ 的泊松过程.
- 这样的计数过程称为**条件（混和）泊松过程**.

假设 L 是密度函数为 g 的连续随机变量. 因为

$$
\begin{aligned}
P(N(t+s)-N(s)=n) &= \int_0^\infty P(N(t+s)-N(s)=n|L=\lambda)g(\lambda)d\lambda \\
&= \int_0^\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}g(\lambda)d\lambda,
\end{aligned}
$$

所以条件泊松过程有平稳增量. 然而因为每个区间事件发生数都同时受到 L 的影响, 所以条件泊松过程一般不具有独立增量.

我们可以计算在给定 $N(t)=n$ 时 L 的条件分布:

$$
\begin{aligned}
P(L \le x | N(t)=n) &= \frac{P(L \le x, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{\int_0^\infty P(L \le x, N(t)=n | L=\lambda) g(\lambda) d\lambda}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{\int_0^x P(N(t)=n | L=\lambda) g(\lambda) d\lambda}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda) d\lambda}.
\end{aligned}
$$

于是给定 $N(t)=n$ 时, L 的条件密度函数是

$$
f_{L|N(t)}(\lambda|n) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda t)^n g(\lambda) d\lambda}, \quad \lambda \ge 0.
$$

例 2.1

保险公司认为每个参保人都有各自的事故率，而当时间以年为计量单位时，具有事故率 λ 的参保人的索赔次数是一个强度为 λ 的过程分布. 每个参保人有一个固定的（未知）的事故率，假设它是在 $(0,1)$ 上均匀分布. 已知一个参保人在前 t 年提出了 n 次索赔，那么在该条件下到该参保人下一次索赔的时间间隔分布是什么?

证明.

设 T 到该参保人下一次索赔的时间间隔, 那么我们的目标是计算 $P(T > x|N(t) = n)$. 于是

$$
\begin{aligned}
P(T > x|N(t) = n) &= \int_0^\infty P(T > x|L = \lambda, N(t) = n) f_{L|N(t)}(\lambda|n) d\lambda \\
&= \frac{\int_0^1 e^{-\lambda x} e^{-\lambda t} \lambda^n d\lambda}{\int_0^1 e^{-\lambda t} \lambda^n d\lambda}.
\end{aligned}
$$

□

定义 3.1

如果计数过程 $\{N(t)\}$ 满足条件:

(1) $N(0)=0$;

(2) 独立增量性: $\{N(t)\}$ 是独立增量过程;

(3) 非齐普通性: 对任何 $t\geq 0$, 当正数 $h\to 0$ 时, 有

$$\begin{cases} P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda(t)h+o(h), \\ P(N(t+h)-N(t)\geq 2)=o(h), \end{cases}$$

则称 $\{N(t)\}$ 是**非时齐泊松过程**, 称 $\lambda(t)$ 是 $\{N(t)\}$ 的强度函数.

容易理解，当强度函数 $\lambda(t)$ 变化平缓时，在较小的时间段内可以用强度函数 $\lambda(t)$ 在这段时间的平均代替 $\lambda(t)$，从而在小时间段中，可视 $\{N(t)\}$ 为时齐的泊松过程. 例如对于较小的时间段 $(s,t]$ 中，可以将汽车流视为时齐的泊松流，这时的强度 λ 是源非时齐泊松过程的强度函数 $\lambda(t)$ 在 $(s,t]$ 上的平均：

$$\lambda = \frac{1}{t-s}\int_s^t \lambda(u)du.$$

定义

$$m(s,t] := \int_s^t \lambda(u)du.$$

其表示 $\lambda(t)$ 与时间起点 s 及终点 t 围成的图形的面积.

定理 3.2

设 $\{N(t)\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的泊松过程，则 $(s,t]$ 内发生的事件数 $N(s,t] = N(t) - N(s)$ 服从数学期望为 $m(s,t]$ 的泊松分布，即

$$P(N(s,t] = k) = \frac{(m(s,t])^k}{k!} \exp(-m(s,t]), \ \ k = 0, 1, \cdots . \tag{3.1}$$

证明.

不妨假设 $s=0$，其他情形类似讨论. 固定 $k\geq 0$，采用求解微分方程的方法. 令

$$p_k(t)=P(N(t)=k).$$

从 $p_0(t)$ 开始. 显然，由假设 (2) 和 (3) 得·

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta t) &= p_0(t)(P(N(t,t+\Delta t]=0) \\ &= p_0(t)[1-\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)] \\ &= p_0(t)-p_0(t)\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t). \end{aligned}$$

令 $\Delta t\to 0$，得

$$p_0'(t)=-\lambda(t)p_0(t).$$

证明.

求解齐次常微分，并利用初始条件 $p_0(1)=1$ 得

$$p_0(t)=e^{-m(t)}.$$

类似地，由假设 (2) 和 (3) 得

$$p_k'(t)=-\lambda(t)p_k(t)+\lambda(t)p_{k-1}(t).$$

利用归纳法求解上述非齐次常微分，得

$$p_k(t)=\frac{(m(t))^k}{k!}e^{-m(t)}.$$

定理证毕. □

设泊松过程 $\{N(t)\}$ 有强度函数 $\lambda(t)$. 对 $a>0$，在时刻 a 重新计数时，得到的计数过程为

$$\tilde{N}(t)=N(t+a)-N(a),\ t\geq 0. \tag{3.2}$$

定理 3.3

设非时齐泊松过程 $\{N(t)\}$ 有强度函数 $\lambda(t)$. 对 $a>0$，计数过程 (3.2) 是非时齐泊松过程，有强度函数 $\tilde{\lambda}(t)=\lambda(t+a)$.

证明.

容易看出定义 3.1 的条件 (1) 和 (2) 成立. 下面验证 (3).

$$\begin{aligned}
P(\tilde{N}(t+h)-\tilde{N}(t)=1) &= P(N(t+h+a)-N(t+a)=1) \\
&= \lambda(t+a)h+o(h), \\
P(\tilde{N}(t+h)-\tilde{N}(t)\geq 2) &= P(N(t+h+a)-N(t+a)\geq 2) \\
&= o(h).
\end{aligned}$$

$\square$

定理 3.4

设 $\{N(t)\}$ 是一个非时齐泊松过程，具有恒正的强度函数 $\lambda(t)$. 对任意 $t \geq 0$，令 $N^*(t) = N[m^{-1}(t)]$，其中 $m(t) = E[N(t)]$. 则 $\{N^*(t)\}$ 是一个强度为 1 的泊松过程.

证明.

由于 $\lambda(t) > 0$，我们知 $m(t)$ 是严格单调递增函数，所以它存在一个严格单调递增的反函数 $m^{-1}(t)$. 我们来验证 $N^*(t) = N[m^{-1}(t)]$ 是一个 Poisson 过程.

(1) $N^*(0) = N(m^{-1}(0) = N(0) = 0$.

(2) 设 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，由单调性我们知 $0 = m^{-1}(t_0) < m^{-1}(t_1) < \cdots < m^{-1}(t_n)$. 由 $\{N(t)\}$ 的独立增量性，我们知

$$N(m^{-1}(t_0)), N(m^{-1}(t_0), m^{-1}(t_1)], \cdots, N(m^{-1}(t_{n-1}), m^{-1}(t_n)]$$

相互独立. 于是 $N^*(t_0), N^*(t_1) - N^*(t_0), N^*(t_2) - N^*(t_1), \cdots, N^*(t_n) - N^*(t_{n-1})$ 相互独立.

(3) 对于 $s, t \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned} P(N^*(t+s) - N^*(s) = n) &= P(N(m^{-1}(t+s)) - N(m^{-1}(s)) = n) \\ &= p(N(m^{-1}(s), m^{-1}(t+s)]) = n) \\ &= e^{-m(m^{-1}(t+s)) + m(m^{-1}(s))} \frac{[m(m^{-1}(t+s)) - m(m^{-1}(s))]^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-t} t^n}{n!}. \end{aligned}$$

这里注意到 $m(m^{-1}(s), m^{-1}(t+s)] = m(0, m^{-1}(t+s)] - m(0, m^{-1}(s)] = m(m^{-1}(t+s)) - m(m^{-1}(s)) = t$. □

定理 3.5

令 $t>0$，$n\geq 1$. 假设 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是独立同分布随机变量，密度函数为 $\frac{\lambda(u)}{m(t)}$, $0\leq u\leq t$，那么

$$(S_1, \cdots, S_n | N(t)=n) =_d (V_{(1)}, V(2), \cdots, V_{(n)}),$$

其中 $V_{(1)}$, $V_{(2)}$, $\cdots$, $V_{(n)}$ 是 V_1, V_2, $\cdots$, V_n 的次序统计量. 更具体地说，在给定 $N(t)=n$ 的条件下，$S_1, \cdots, S_n$ 的条件密度为

$$p(s_1, s_2, \cdots, s_n | N(t)=n) = n! \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(s_i)}{m(t)}, \quad 0\leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leq t.$$

例 3.6

设某设备的使用期限是 10 年，在前 5 年里它平均 2.5 年需要维修一次，后 5 年平均 2 年需维修一次. 试求它在使用期内只维修过一次的概率.

解.

用非齐次泊松过程来描述故障发生所对应的计数过程，则强度函数为

$$\lambda(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2.5}, & 0\le t\le 5,\\ \dfrac{1}{2}, & 5<t<10.\end{cases}$$

于是由

$$m(10)=\int_0^{10}\lambda(t)dt=4.5,$$

我们有

$$P(N(10)-N(0)=1)=e^{-4.5}\frac{(4.5)^1}{1!}=\frac{9}{2}e^{-\frac{9}{2}}.$$

□

例 3.7

某患者具有间歇神经痛，一般情况下不需要服用药物镇痛；但有时痛得厉害，需要服用药物止痛. 据观察记录，该患者 $(0,t]$ 内出现神经痛的次数 $N(t)$ 构成一个 Poisson 过程，平均次数为 λ. 另外，假设患者在 t 时刻出现的神经痛需要服用的药物的概率为 $p(t)$ (依赖于 t). 令 $t>0$，$\tilde{N}(t)$ 表示 $(0,t]$ 内服用的药物的次数，求 $\tilde{N}(t)$ 的分布.

解.

假设 $N(t)=n$，并且出现神经痛的时刻为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$. 由于是否服药相互独立，所以在此条件下我们有 $\tilde{N}(t)=k$ (其中 $k\le n$) 的概率为

$$f(S_1, S_2, \cdots, S_n) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \prod_{i=1}^{k} p(S_{i_1}) \prod_{j\ne i_1,\cdots,i_k} [1-p(S_j)].$$

因此，利用全概率公式得

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}(t)=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(\tilde{N}(t)=k|N(t)=n)P(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} E(f(S_1, S_2, \cdots, S_n)|N(t)=n)P(N(t)=n). \end{aligned}$$

解.

注意到函数 f 关于 n 个变量对称，所以我们有

$$\begin{aligned} E(f(S_1,\cdots,S_n)|N(t)=n) &= Ef(U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)}) \\ &= Ef(U_1,U_2,\cdots,U_n), \end{aligned}$$

其中 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 为独立同分布均匀随机变量. 不难计算

$$Ef(U_1,U_2,\cdots,U_n) = \binom{n}{k}\frac{1}{t^n}[\int_0^t p(u)du]^k[t-\int_0^t p(u)du]^{n-k}.$$

于是

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}(t)=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} Ef(U_1,\cdots,U_n)P(N(t)=n) \\ &= \frac{(\lambda\int_0^t p(u)du)^k}{k!}e^{-\lambda\int_0^t p(u)du}. \end{aligned}$$

□