

第 8 讲 随机过程简介与泊松过程总结总结

1 课程第一部分总结

2 例子

1 课程第一部分总结

2 例子

课程第一部分总结

一. 概率论回顾

掌握好概率论的基本知识. (难点: 条件期望)

二. 随机过程简介

随机过程的定义, 随机过程的有限维分布, 随机过程的数字特征, 独立增量性与平稳增量性.

三. 泊松过程 (重点: 基本性质与综合应用)

1. 泊松过程的等价定义. (难点: 到达时刻的条件分布)
2. 年龄与寿命.
3. 汇合与分流.
4. 复合泊松过程.
5. 非时齐泊松过程.

1 课程第一部分总结

2 例子

例 2.1

设随机过程 $Z(t) = X \sin t + Y \cos t$, 其中 X 和 Y 是相互独立的二元随机变量, 他们都分别以 $2/3$ 和 $1/3$ 的概率取值 -1 和 -2 .

1. 求 $Z(t)$ 的均值函数和自相关函数;
2. $Z(t)$ 是否为宽平稳过程, 是否为严平稳过程?

证明.

1. 首先, 我们有 $E[X] = E[Y] = 0$, $E[X^2] = E[Y^2] = 2$, 以及 $E[XY] = 0$. 有均值函数和自相关函数的定义我们有

$$\begin{aligned}\mu_Z(t) &= E[X \sin t + Y \cos t] \\ &= E[X] \sin t + E[Y] \cos t \\ &= 0, \\ r_X(t_1, t_2) &= E[(X \sin t_1 + Y \cos t_1)(X \sin t_2 + Y \cos t_2)] \\ &= E[X^2] \sin t_1 \sin t_2 + E[XY](\sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2) + E[Y^2] \cos t_1 \cos t_2 \\ &= 2 \cos(t_1 - t_2).\end{aligned}$$

2. 由上一问我们知 $Z(t)$ 是宽平稳过程. 我们有

$$\begin{aligned}E[Z^3(t)] &= E[(X \sin t + Y \cos t)^3] \\ &= E[X^3] \sin^3 t + 3E[X^2 Y] \sin^2 t \cos t + 3E[XY^2] \sin t \cos^2 t + E[Y^3] \cos^3 t,\end{aligned}$$

其中 $E[X^3] = E[Y^3] = 0$, $E[X^2 Y] = E[XY^2] = 0$. 代入上式我们可得

$$E[Z^3(t)] = 2(\sin^3 t + \cos^3 t),$$

于是 $Z(t)$ 不是严平稳过程.



例 2.2

如果 Z_0, Z_1, \dots 是独立同分布的随机变量, 定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n$, 证明 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是平稳独立增量过程.

证明.

(1) 先证对任意给定的 k 个时刻 $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 随机变量 $X_{n_2} - X_{n_1}, X_{n_3} - X_{n_2}, \cdots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$ 相互独立. 事实上, 由于 Z_0, Z_1, \cdots 是相互独立的随机变量, 所以

$$X_{n_{i+1}} - X_{n_i} = \sum_{l=n_i+1}^{n_{i+1}} Z_l, \quad i = 1, 2, \cdots$$

也相互独立.

证明.

(2) 再证 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 有平稳增量, 即证明对任意给定的两个时刻 $0 \leq n_1 < n_2$ 以及整数 $l > 0$, 随机变量 $X_{n_1+l} - X_{n_1}$ 与 $X_{n_2+l} - X_{n_2}$ 有相同分布. 由 Z_0, Z_1, \dots 同分布知它们有相同的特征函数, 记为 $\phi_{Z_1}(t)$. 再由 Z_0, Z_1, \dots 的独立性, 我们有

$$X_{n_1+l} - X_{n_1} = \sum_{l=n_1+1}^{n_1+l} Z_l \text{ 与 } X_{n_2+l} - X_{n_2} = \sum_{l=n_2+1}^{n_2+l} Z_l$$

有相同的特征函数 $[\phi_Z(u)]^l$, 利用随机变量特征函数唯一确定其分布的性质, 我们知 $X_{n_1+l} - X_{n_1}$ 与 $X_{n_2+l} - X_{n_2}$ 有相同分布.

综上, $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 是平稳独立增量过程. □

例 2.3

人造卫星按照强度为 λ 的泊松流路过靶场上空. 如果试射一枚导弹需要的时间为 s , 计算在时刻 t 发射的导弹不被卫星监测的概率.

解.

由题意, 人造卫星路过靶场上空的过程是一个泊松过程, 记第 n 次到达的时间为 S_n . 时刻 t 之后第一次有卫星路过的时刻为 $S_{N(t)+1}$. 记 $R(t) = S_{N(t)+1} - t$, 则 $R(t) \sim \mathcal{E}(\lambda)$. 在时刻 t 发射的导弹不被卫星监测当且仅当 $R(t) > s$. 于是我们知在时刻 T 发射的导弹不被卫星监测的概率为

$$P(R(t) > s) = e^{-\lambda s}.$$



例 2.4

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, T 是和该泊松过程独立的随机变量. 当 T 服从参数为 β 的指数分布时,

- (1) 求 $N(T)$ 的概率分布;
- (2) 计算 $E[N(T)]$.

解.

(1) 由全概率公式我们有

$$\begin{aligned} P(N(T) = n) &= \int_0^{+\infty} P(N(t) = n | T = t) f_T(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} P(N(t) = n) \beta e^{-\beta t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \beta e^{-\beta t} dt \\ &= \frac{\beta}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\beta)t} (\lambda t)^n dt. \\ &= \frac{\lambda^n \beta}{(\lambda + \beta)^{k+1}}. \end{aligned}$$

$$(2) E[N(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(N(T) = n) = \frac{\beta}{\lambda + \beta} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta}\right)^n = \lambda / \beta.$$



例 2.5

某商品每件附赠一张奖券, 奖券有 m 种不同类型. 独立于过去收集的奖券, 某人每次以概率 p_j ($\sum_{i=1}^m p_j = 1$) 收集一张类型 j 的奖券. 以 N 记他为了收集齐全套奖券购买的商品件数. 求 $E[N]$.

解.

如果我们令 N_j 表示为收集到类型 j 所需购买的商品数, 那么

$$N = \max_{1 \leq j \leq m} N_j.$$

我们知道每个 N_j 分别是以 p_j 为参数的几何随机变量, 但它们并不是独立的, 之间的关系比较复杂, 所以上式虽然给出了 N 的几个具体表达, 但似乎并不容易直接应用.

解.

为此, 我们将问题作一个转化. 我们假设奖券收集的时间是按速率为 1 的泊松过程选取的. 如果某时刻得到了类型 j 的奖券, 我们就称该时刻发生了一个类型为 j 的事件 ($1 \leq j \leq m$). 现在我们令 $N_j(t)$ 表示到时刻 t 为止收集到的类型 j 的奖券数, 那么 $\{N_j(t), t \geq 0\}$ ($j = 1, \dots, m$) 是强度为 $\lambda p_j = p_j$ 的相互独立的泊松过程. 令 X_j 表示第 j 个过程的首个事件发生的时间, 并且令

$$X = \max_{1 \leq j \leq m} X_j$$

表示收集到全套收藏的时间.

解.

因为 X_j 是速率为 p_j 的相互独立的指数随机变量, 所以

$$\begin{aligned} P(X \leq t) &= P(\max_{1 \leq j \leq m} X_j < t) \\ &= P(X_j < t, \text{ 对任意 } j = 1, \dots, m) \\ &= \prod_{j=1}^m (1 - e^{-p_j t}). \end{aligned}$$

因此

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > t) dt = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^m (1 - e^{-p_j t}) \right\} dt.$$

解.

下面我们要做的是建立 $E[X]$ 和 $E[N]$ 之间的联系. 记 T_i 为奖券计数所对应的泊松过程的第 i 个到达时间间隔. 不难看出

$$X = \sum_{i=1}^N T_i.$$

因为 T_i 是参数为 1 的相互独立的指数随机变量, 而 N 与 T_i 独立, 所以

$$E[X|N] = NE[T_i] = N.$$

因此

$$E[N] = E[X] = \int_0^{\infty} P(X > t) dt = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^m (1 - e^{-p_j t}) \right\} dt.$$

例 2.6: 阿里巴巴全球数学竞赛 2022 年预赛试题

春节期间，“勇敢牛牛”牛奶公司推出了新春集福活动：每盒牛奶都附赠一个红包，红包中藏有下列“虎”，“生”，“威”中的一款图案。（如下图）



集齐两个“虎”，一个“生”，一个“威”即可拼齐成为“虎虎生威”全家福。这项活动一经推出，就成为了网红爆款，很多人希望能够集齐一整套。假设红包中的图案是独立随机分布的（并且不能从红包外观上进行区别），“虎”，“生”，“威”三款红包按均匀概率 $\frac{1}{3}$ 分布。

(1) 收集齐一整套“虎虎生威”全家福所需要购买的牛奶盒数的数学期望是多少？

- (A) $6\frac{1}{3}$;
- (B) $7\frac{1}{3}$;
- (C) $8\frac{1}{3}$;
- (D) $9\frac{1}{3}$;
- (E) 以上都不对。

例 2.7: 阿里巴巴全球数学竞赛 2022 年预赛试题

(2) 在市场部的周会讨论中, 大家认为当前的图案投放比例, 会导致在收集“虎虎生威”全家福时收集到太多的“生”和“威”, 于是探讨可能的改进方案。记图案“虎”、“生”和“威”的投放比例为 (p, q, r) , 那么下面哪种方案下, 收集齐一整套“虎虎生威”全家福所需要购买的牛奶盒数的数学期望是最小的?

$$(p, q, r) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);$$

$$(p, q, r) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right);$$

$$(p, q, r) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right);$$

$$(p, q, r) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

解.

本例是上例的一个推广. 我们可以将一般问题描述如下: 假设盲盒有 n 种款式, 以及最终目标是对于每种款式 i 需要收集 k_i 个. 记首次达成目标时购买的盲盒数量是 N , 我们的目标是计算 $E[N]$. 我们将这个过程嵌入到泊松过程中: 假设有一个参数为 1 的泊松过程, 每次该过程对应的事件发生时, 就独立地按照概率 p_i 抽取款式. 记

$$T_i = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \text{在时间 } t \text{ 收集到了 } k_i \text{ 个款式 } i\}$$

$$T = \max_{1 \leq i \leq n} T_i.$$

和上例证明类似, 我们有 $E[T] = E[N]$.

解.

我们和上例类似可以算得

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^{\infty} P[T > t] dt \\ &= \int_0^{\infty} (1 - P[T \leq t]) dt \\ &= \int_0^{\infty} (1 - P[T_i \leq t, \forall 1 \leq i \leq n]) dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \sum_{k=0}^{k_i-1} e^{-p_i t} \frac{(p_i t)^k}{k!}\right)\right) dt. \end{aligned}$$

解.

- (1) 在本题中, $n = 3$, 目标收集 $(k_1, k_2, k_3) = (2, 1, 1)$. 我们可以计算得到解析表达式

$$E[N] = 1 + p_1 + \left(\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1-p_i} - \frac{p_1}{(p_1+p_2)^2} - \frac{p_1}{(p_1+p_3)^2}.$$

将 $(p_1, p_2, p_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$ 带入我们可以得到期望为 $7\frac{1}{3}$, 所以答案选 B.

- (2) 上一问中我们已经算得方案 A 的期望是 $7\frac{1}{3}$. D 显然不是一个好方案, 因为收集到“威”字图案的期望是 8, 已经超过了方案 A. 所以核心在于考虑方案 B, C. 利用 (1) 中得到的公式可以计算出 B, C 方案对应的期望分别为 $7\frac{1}{18}$ 和 $6\frac{233}{245}$. 所以方案 C 是最佳的.

例 2.8

一个二维 Poisson 过程是一个在平面上随机发生的事件的过程，它满足

- (1) 对于面积为 A 的任何区域，在这个区域中的事件个数具有均值为 λA 的 Poisson 分布.
- (2) 在不相交的区域中的事件个数是独立的.

对于这样的过程，考察平面中的一个任意的点，而以 X 记它到最近的事件的 (欧式) 距离. 证明:

- (1) $P\{X > t\} = e^{-\lambda\pi t^2}$,
- (2) $E[X] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$.

证明.

- (1) 以 N_t 表示在以该点为中心, 半径为 r 的圆中发生的事件数, 则 N_t 服从参数为 $\lambda\pi t^2$ 的 Poisson 分布

$$P\{X > t\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda\pi t^2}.$$

(2) $E[X] = \int_0^\infty P\{X > t\} dt = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$



例 2.9

设 $\{N(t)\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程, X_1, X_2, \dots 是事件之间的间隔时间, 问:

- (1) 诸 X_i 是否独立?
- (2) 诸 X_i 是否同分布?

证明.

记 $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, 则对任意 $t_1, t_2 > 0$, 有

(1) 由于

$$\begin{aligned} P(X_2 > t_2 | X_1 = t_1) &= P(N(t_1 + t_2) - N(t_1) = 0 | X_1 = t_1) \\ &= P(N(t_1 + t_2) - N(t_1) = 0) \\ &= e^{-[m(t_1+t_2)-m(t_1)]} \end{aligned}$$

与 X_1 的取值 t_1 有关, 所以 X_2 与 X_1 不独立, 从而 $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ 不独立.

(2) 因为 $P(X_1 > t_1) = e^{-m(t_1)}$, 而 $P(X_2 > t_2) = \int_0^\infty e^{-m(t_1+t_2)} m(t_1) dt_1$. 所以 X_1 和 X_2 不同分布. □