第 11 讲 更新方程与开关系统

为了方便地得到更新方程的性质，先介绍一点卷积的基本性质. 我们规定用 $\int_a^b$ 表示在闭区间 $[a,b]$ 上的积分.

本节中所讨论的函数当自变量在 $(-\infty,0)$ 中变化时，取值都是 0.

定义 1.1

设非负随机变量 X, Y 独立, 分别有分布函数 $F(x), G(x)$, 则 $U = X+Y$ 有分布函数

$$
\begin{aligned}
F * G(t) &= P(X+Y \leq t) \\
&= \int_0^t P(X+Y \leq t | Y = s) dG(s) \\
&= \int F(t-s) dG(s).
\end{aligned}
$$

称 $F * G(t)$ 为 F 与 G 的卷积.

由于 $X+Y=Y+X$，所以有

$$F*G(t)=G*F(t).$$

再设 $Z\ge 0$，有分布函数 H，与 X,Y 独立，则 $X+Y+Z=U+Z$ 有分布函数 $(F*G)*H$. 利用 $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$，我们有 $(F*G)*H=F*(G*H)$. 于是可以把 $(F*G)*H$ 写成 $F*G*H$.

现在设 $h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数 (指在任何有限区间 $[0,b)$ 上有界的函数)，$G(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数，也称

$$h * G(t) = \int_0^t h(t-s)dG(s),\ t \geq 0$$

为 h, G 的卷积. 令 $t=0$ 时得到 $h * G(0) = h(0)G(0)$，并且有

$$\sup_{0\leq t\leq b} |h * G(t)| \leq \int_0^b \sup_{0\leq t\leq b} |h(t)| dG(s) = \sup_{0\leq t\leq b} |h(t)| G(b),$$

所以 $h * G(t)$ 也是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数.

对于另外的 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数 H，可以定义 $(h*G)*H(t)$. 下面证明

$$(h*G)*H(t)=h*(G*H)(t),\ t\geq 0.$$

由于只需要对每个固定的 t 证明上式，所以无妨设 G 和 H 分别是 Y 和 Z 的分布函数，Y,Z 独立. 于是

$$\begin{aligned}
E[h(t-(Y+Z))I[Y+Z\leq t]] &= \int_0^t E[h(t-Y-Z)I[Y+Z\leq t]|Z=z]dH(z)\\
&= \int_0^t E[h(t-Y-z)I[Y+z\leq t]]dH(z)\\
&= \int_0^t (\int_0^{t-z} h(t-y-z)dG(y))dH(z)\\
&= \int_0^t h*G(t-z)dH(z)\\
&= (h*G)*H(t),\ t\geq 0.
\end{aligned}$$

另一方面，$U = Y + Z$ 有分布函数 $G * H$，所以又有

$$\begin{aligned} E[h(t-(Y+Z))I[Y+Z \le t]] &= E[h(t-U)I[U \le t]] \\ &= \int_0^t h(t-u)d(G*H)(u) \\ &= h*(G*H)(t). \end{aligned}$$

于是得证. 从而我们可以把括号省去，得到

$$h*G*H(t) = h*(G*H)(t) = (h*G)*H(t).$$

如果 $\{X_i\}$ 是独立同分布随机变量序列，有共同的分布函数 $F(x)$，则用

$$F_n(t) = P(S_n \leq t)$$

表示 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的分布函数时，有

$$F_1(t) = F(t),\ F_2(t) = F * F(t),\ \cdots,\ F_n(t) = F * F * \cdots * F(t).$$

于是称 $F_n(t)$ 是 F 的 n 重卷积.

对任何使得 $i+j=n$ 的非负整数 i, j，可以看出有公式

$$F_n(t) = F_i * F_j(t).$$

另外，只要 $\mu = E[X_1] > 0$，由强大数律得到 $S_n \to \infty$ a.s.，所以对任意 $t < \infty$，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \lim_{n\to\infty} P(S_n \le t) = 0.$$

定理 1.2

设 $F(t)$ 是非负随机变量 X 的分布函数，$h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数，G，H 是 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数，则对 $t \geq 0$，有

(1) $G * H(t) = H * G(t)$;

(2) $h * (G + H) = h * G + h * H$;

(3) $h * G * H(t) = (h * G) * H(t) = h * (G * H)(t)$;

(4) $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = 0$;

(5) 已知 $F(t)$ 时，方程 $h(t) = h * F(t)$ 只有零解 $h \equiv 0$;

(6) $m(t) = F(t) + m * F(t)$，其中 $m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ 是更新函数.

证明.

只需要证明 (5) 和 (6). 对于任何取定的 t，由卷积的定义知道

$$|h * F_n(t)| \leq \sup_{0\leq s\leq t} |h(s)|F_n(t) \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时.}$$

于是反复用 $h(t) = h * F(t)$ 得到

$$\begin{aligned} h(t) &= h * F(t) = (h * F) * F(t) = h * F_2(t) \\ &= \cdots\cdots \\ &= h * F_n(t) \to 0. \end{aligned}$$

证明.

下面我们来证明 (6)，根据单调收敛定理，我们有

$$
\begin{aligned}
m(t) &= F(t) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} F_{k-1} * F(t) \\
&= F(t) + \lim_{n\to\infty} \int_0^t \sum_{k=2}^{n} F_{k-1}(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + \int_0^t \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + \int_0^t m(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + m * F(t).
\end{aligned}
$$

从而得证. □

卷积及其性质
更新方程
分支过程
开关系统
多个状态的系统

更新方程

我们仍用 $\{N(t)\}$ 表示更新间隔为 $\{X_i\}$ 的更新过程. 设 $h(t)$ 是已知的局部有界函数, $F(t)$ 是更新间隔 X_i 的分布函数. 未知函数 $B(t)$ 满足的方程

$$B(t) = h(t) + \int_0^t B(t-s)dF(s) \tag{2.1}$$

称为更新方程.

定理 2.1

更新方程 (2.1) 有唯一局部有界解

$$B(t) = h(t) + \int_0^t h(t-s)dm(s), \tag{2.2}$$

其中 $m(t) = E[N(t)]$ 是更新函数.

证明.

因为由 (2.2) 定义的 $B(t)$ 满足

$$\sup_{0\le s\le t}|B(s)| \le \sup_{0\le s\le t}|h(s)| + \sup_{0\le s\le t}|h(s)|m(t) < \infty,$$

所以是局部有界函数. 下面验证它满足 (2.1). 由 $m(t) = F(t) + m * F(t)$ 得到

$$\begin{aligned}
B(t) &= h(t) + \int_0^t h(t-s)dm(s) \\
&= h(t) + h * m(t) \\
&= h(t) + h * F(t) + h * m * F(t) \\
&= h(t) + (h + h * m) * F(t) \\
&= h(t) + B * F(t) \\
&= h(t) + \int_0^t B(t-s)dF(s).
\end{aligned}$$

证明.

所以由 (2.2) 定义的 $B(t)$ 是 (2.1) 的解. 如果 $B_1(t)$ 也是 (2.1) 的局部有界解, 则局部有界函数 $b(t) = B(t) - B_1(t)$ 满足

$$b(t) = \int_0^t b(t-s)dF(s) = b * F(t).$$

由定理 1.2 (5) 我们知 $b(t)$ 恒等于 0, 所以局部有界解是唯一存在的. $\square$

一种生物的个体在寿终时以概率 p_i 分裂成 i 个后代. 所有后代独立成活，寿终时又以概率 p_i 分裂成 i 个后代. 如果这种生物的寿命是来自总体 T 的随机变量，我们关心随着时间的推移，生物钟总数的平均增长情况.
先考虑一个生物的分裂问题. 将这个生物的降生时刻记为零时刻，用 $X(t)$ 表示 t 时刻该生物的后代数目，$\{X(t)\}$ 被称为 分支过程. 我们讨论 $EX(t)$ 的增长速度. 用 Y 表示 $\{p_i\}$ 为概率分布的随机变量，则每个生物寿终时平均分裂成

$$\mu_Y = E[Y] = \sum_{i=0}^{\infty} ip_i$$

个生物.

命题 3.1

对于分支过程 $\{X(t)\}$，设 $X(0)=1$，用 T_1 表示第一个体的寿命. 如果 $P(T_1>0)=1$，则有

$$E[X(t)|T_1=s]=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\le t<s,\\ \mu_Y E[X(t-s)] & \text{当 } 0<s\le t.\end{cases}$$

证明.

用 Y_1 表示第一个个体寿终时分裂出的后代数. 已知 $T_1 = s > t \geq 0$ 时, t 时只有一个个体, 故 $X(t) = 1$. 已知 $T_1 = s \leq t$ 时, 如果在 s 时刻该个体分裂成了 i 个个体, 则 $Y_1 = i$. 这 i 个个体独立生存, 并且从 s 开始计时, 经过 $t-s$ 时间, 这 i 个个体的平均后代数为 $iE[X(t-s)]$. 于是对 $0 < s \leq t$, 我们有

$$
\begin{aligned}
E[X(t)|T_1 = s] &= \sum_{i=1}^{\infty} E[X(t)|T_1 = s, Y_1 = i]P(Y_1 = i|T_1 = s) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} iE[X(t-s)]p_i = \mu_Y E[X(t-s)].
\end{aligned}
$$

从而得证. □

用 $G(y) = P(Y \le y)$ 表示 Y 的分布函数. $\mu_Y = E[Y] \le 1$ 表明每个个体的平均后代数不大于 1. 这样的生物群体最终一定会消亡，不必讨论. 下面讨论 $\mu_Y > 1$ 的情况.

命题 3.2

对于分支过程 $\{X(t)\}$，用 $M(t) = E[X(t)]$ 表示 t 时单一个体的后代平均数，假设生物的寿命 T 不是格点随机变量，有分布函数 $F(x) = P(T \le x)$ 和数学期望 $\mu_Y > 1$，且 $F(0) = 0$，则有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = \frac{\mu_Y - 1}{\mu_Y^2 \alpha E[Te^{-\alpha T}]},$$

其中 α 是方程

$$E[e^{-\alpha T}] = \frac{1}{\mu_Y} \tag{3.1}$$

的唯一解.

证明.

首先不难看出 $\phi(\alpha)=E[e^{-\alpha T}]=\int_0^\infty e^{-\alpha s}dF(s)$ 是 α 的单调连续函数，$\phi(0)=1>1/\mu_Y$，$\phi(\infty)=0<1/\mu_Y$，所以 (3.1) 有唯一解 α.
用 T_1 表示第一个个体的寿命. 利用全概率公式以及命题 3.1 我们有

$$\begin{aligned}M(t)=E[X(t)]&=\int_0^\infty E[X(t)|T_1=s]dF(s)\\&=\int_{t+}^\infty 1dF(s)+\int_0^t \mu_Y M(t-s)dF(s)\\&=\overline{F}(t)+\int_0^t \mu_Y M(t-s)dF(s),\end{aligned}$$

其中 $\int_{t+}^\infty=\int_{(t,\infty)}$.

证明.

上式两边同乘以 $e^{-\alpha t}$，得到更新方程

$$\frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = e^{-\alpha t}\overline{F}(t) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} M(t-s)dG(s),$$

其中

$$G(s) = \mu_Y \int_0^s e^{-\alpha u} dF(u)$$

是概率分布函数，使得 $dG(s) = \mu_Y e^{-\alpha s} dF(s)$.

证明.

由定理 2.1 我们有

$$\frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = e^{-\alpha t}\overline{F}(t) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\overline{F}(t-s)dm_G(s),$$

其中 $m_G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s)$ 是更新函数. 再利用关键更新定理和 $e^{-\alpha t}\overline{F}(t) \to 0 (t \to \infty)$，得到

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt,$$

其中

$$\mu_G = \int_0^{\infty} tdG(t) = \mu_Y \int_0^{\infty} te^{-\alpha t}dF(t) = \mu_Y E[Te^{-\alpha T}].$$

证明.

注意

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}\int_t^\infty dF(s)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-\alpha t}dt\right)dF(s) \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty (1-e^{-\alpha t})dF(s) \\
&= \frac{1}{\alpha}(1-E[e^{-\alpha T}]) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\mu_Y}\right) = \frac{\mu_Y - 1}{\alpha\mu_Y}.
\end{aligned}
$$

证明.

于是得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{e^{\alpha t}}=\frac{(\mu_Y-1)/\alpha\mu_Y}{\mu_Y E[Te^{-\alpha T}]}=\frac{\mu_Y-1}{\mu_Y^2\alpha E[Te^{-\alpha T}]}.$$

从而得证. $\square$

上面命题表明只要 $\mu_Y>1$，$M(t)=E[X(t)]$ 与 $e^{\alpha t}$ 有相同的增长速度，也就是说分支过程的平均增长速度是指数阶的.

卷积及其性质
更新方程
分支过程
开关系统
多个状态的系统

如果把冰箱视为一个工作系统，则称 U_i 为系统的第 i 个开状态时间，称 V_i 为系统的第 i 个关状态时间. 由于系统只有开关两个状态，所以称为**开关系统**.

我们关心一个系统在一段时间内处于开状态的时间比例. 如果同时有多个系统运行，我们还关心同一时间有多少个系统处于开状态.

引入更新间隔 $X_i = U_i + V_i (i \geq 1)$. 称以 X_i 为更新间隔的更新过程 $\{N(t)\}$ 为交替更新过程.
在前 n 次更新中，系统处于开状态的比例是

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} U_i}{\sum_{i=1}^{n} (U_i + V_i)}.$$

在引入 $X = U + V$，则 $\{X_i\}$ 是来自总体 X 的随机变量. 设

$$\mu_U = E[U],\ \mu_V = E[V],\ \mu_X = E[X] = \mu_U + \mu_V.$$

利用强大数律我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i}{\sum_{i=1}^{n} (U_i + V_i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (U_i + V_i)} = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V}\ a.s..$$

所以，我们可以想象，当 t 充分大时，“t 时开” 的概率 $P(t\text{时开})$ 会收敛到 $\dfrac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V}$. 下面我们来证明这个结论.

用 $\overline{G}(t)$ 表示 U_1 的生存函数，用 $F_n(x) = P(S_n \le x)$ 表示 S_n 的分布函数，则 $F(x) = F_1(x)$.

定理 4.1

如果 X_1 不是格点随机变量，μ_U, μ_V 是正数，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t\text{ 时开}) = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V},$$
$$\lim_{t\to\infty} P(t\text{ 时关}) = \frac{\mu_V}{\mu_U + \mu_V}.$$

证明.

对于 $t>0$，利用 $\{N(t)=0\}=\{X_1>t\}$ 得到

$$\begin{aligned} P(t\text{ 时开}, N(t)=0) &= P(t\text{ 时开},\ X_1>t) \\ &= P(U_1>t,\ X_1>t) \\ &= P(U_1>t) \\ &= \overline{G}(t). \end{aligned}$$

证明.

对于 $n \geq 1$ 以及 $s \in [0,t]$，在条件 $S_n = s$ 下，$S_{n+1} = s + X_{n+1} > t$ 发生时，有 $\{t\ \text{时开}\} = \{U_{n+1} > t - s\}$. 这表明：对 $s \leq t$，有

$$
\begin{aligned}
P(t\ \text{时开}, N(t) = n | S_n = s) &= P(t\ \text{时开}, S_n \leq t, S_{n+1} > t | S_n = s) \\
&= P(U_{n+1} > t - s, s + X_{n+1} > t | S_n = s) \\
&= P(U_{n+1} > t - s, X_{n+1} > t - s) \\
&= P(U_{n+1} > t - s) = \overline{G}(t - s).
\end{aligned}
$$

证明.

事件 $\{N(t)=n\}(n=0,1,\cdots)$ 构成完备事件组. 利用全概率公式我们有：

$$\begin{aligned} P(t \text{ 时开}) &= P(t \text{ 时开}, N(t)=0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(t \text{ 时开}, N(t)=n) \\ &= \overline{G}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(t \text{ 时开}, N(t)=n | S_n = s) dF_n(s) \\ &= \overline{G}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \overline{G}(t-s) dF_n(s) \\ &= \overline{G}(t) + \int_0^t \overline{G}(t-s) dm(s). \end{aligned} \tag{4.1}$$

注意 X_1 不是格点随机变量，$\overline{G}(s)$ 是单调不增函数，积分

$$\int_0^{\infty} \overline{G}(s) ds = \mu_U < \infty.$$

证明.

所以当 $t \to \infty$ 时，由 $\overline{G}(t) \to 0$ 和关键更新定理我们有

$$P(t\ \text{时开}) \to \frac{1}{\mu_X} \int_0^\infty \overline{G}(s)ds = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V}.$$

最后得到

$$P(t\ \text{时关}) = 1 - P(t\ \text{时开}) \to \frac{\mu_V}{\mu_U + \mu_V}.$$

从而得证. $\square$

对于 $b > a \geq 0$，为了研究时间段 $(a, b]$ 中开状态的平均长度引入

$$U(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \text{ 是开状态}, \\ 0, & \text{当 } t \text{ 是关状态}, \end{cases}$$

则

$$W(t)=\int_0^t U(s)ds$$

是 $[0,t]$ 中开状态时间的长度,

$$W(a,b]=\int_a^b U(s)ds$$

是 $(a,b]$ 中开状态时间的长度，$E[W(a,b]]$ 是 $(a,b]$ 中开状态的平均长度. 我们知

$$h(t)=E[U(t)]=P(t\text{ 时开})$$

是 $(a,b]$ 中的黎曼可积函数.

定理 4.2

如果 μ_U，μ_V 是正数，X_1 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty} E[W(a+t,b+t]] = \frac{(b-a)\mu_U}{\mu_U+\mu_V}.$$

证明.

因为 $\{N(t)\}$ 在 $(a,b]$ 中只有有限次更新，所以 $U(t)$ 的每条轨迹都是 $(a,b]$ 中的阶梯函数，只有有限个跳跃点，从而是黎曼可积函数. 按照黎曼积分的定义，将 $(a,b]$ 进行 n 等分，记等分点为

$$a_k = a + (b-a)k/n,\ \ k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

则有

$$\int_a^b U(s)da = \lim_{n\to\infty} \xi_n \ a.s., \text{ 其中 } \xi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} U(a_k).$$

证明.

因为 ξ_n 有界：$|\xi_n| \le b-a$，所以用有界收敛定理我们有

$$
\begin{aligned}
E[W(a,b]] &= E[\int_a^b U(s)ds] = \lim_{n\to\infty} E[\xi_n] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}E[U(a_k)] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}h(a_k) \\
&= \int_a^b h(s)ds.
\end{aligned}
$$

把 a,b 分别换成 $a+t, b+t$，得到

$$E[W(a+t,b+t]] = \int_{a+t}^{b+t} h(s)ds = \int_a^b h(t+s)ds.$$

注意 $h(t)$ 有界，且 $\lim_{t\to\infty} h(t) = \mu_U/(\mu_U+\mu_V)$，所以再由有界收敛定理我们有

$$\lim_{t\to\infty} E[W(a+t,b+t]] = \lim_{t\to\infty}\int_a^b h(t+s)ds = \frac{(b-a)\mu_U}{\mu_U+\mu_V}. \qquad \square$$

例 4.3

设开关系统的平均间隔时间是 0.24 h，在开状态耗电 0.8 kW/h，在关状态的耗电忽略不计.

(1) 运行了 10 天的系统在下一周的平均耗电量是多少?

(2) 如果这个系统的 $\mu_U = 0.03$ h，$\mu_V = 0.21$ h，系统在下一周中的平均耗电量是多少 kW?

证明.

相对于平均时间间隔 0.24h，10 天已经足够长了，按照定理 4.2，以后的一周中，系统处于开状态的平均时间为

$$7 \times 24 \times \frac{\mu_U}{\mu_u = \mu_v} = \frac{168\mu_U}{\mu_U + \mu_V}.$$

(1) 工作时耗电 0.8 kW/h，所以一周的平均耗电量是

$$\frac{0.8 \times 168\mu_U}{\mu_U + \mu_V} = \frac{134.4\mu_U}{\mu_U + \mu_V}(\mathrm{kW}).$$

(2) 将条件代入，我们得到一周的平均耗电量为

$$\frac{134.4 \times 0.03}{0.03 + 0.21}\mathrm{kW} = 16.8\mathrm{kW}.$$

□

多个状态的系统

设一个系统有 r 个工作状态. 系统在一开始处于状态 1，在状态 1 工作 U_{11} 时间后进入状态 2，在状态 2 工作 U_{12} 时间后进入状态 3，$\cdots\cdots$，在状态 $r-1$ 工作 $U_{1,r-1}$ 时间后进入状态 r，在状态 r 工作 U_{1r} 时间后完成一次循环，重新进入状态 1；在状态 1 工作 U_{21} 时间后进入状态 2，在状态 2 工作 U_{22} 时间后进入状态 3，$\cdots\cdots$，在状态 $r-1$ 工作 $U_{2,r-1}$ 时间后进入状态 r，在状态 r 工作 U_{2r} 时间后完成一次循环，重新进入状态 1；$\cdots\cdots$.

可以看出 U_{ij} 是第 i 次循环处于状态 j 的工作时间长度. 引入

$$\mathbf{X} = (U_1, U_2, \cdots, U_r).$$

认为

$$\mathbf{U}_i = (U_{i1}, U_{i2}, \cdots, U_{ir}),\ i = 1, 2, \cdots$$

是来自总体 $\mathbf{X}$ 的随机向量. 对于给定的 $j = 1, 2, \cdots, r$, $\{U_{ij} | i = 1, 2, \cdots\}$ 是来自总体 U_j 的随机变量.

引入更新间隔

$$X_i = U_{i1} + U_{i2} + \cdots + U_{ir},\ i = 1, 2, \cdots,$$

以及以 $\{X_i\}$ 为更新间隔的更新过程 $\{N(t)\}$，称 $\{N(t)\}$ 为有 r 个状态的更新过程. 这时 $\{X_i\}$ 是来自总体 $X = U_1 + U_2 + \cdots + U_r$ 的随机变量.

用 $\mu_i = E[U_i]$ 表示一个循环中系统处于第 i 个状态的平均时间长度. 我们有以下的结论.

定理 5.1

如果 X 不是格点随机变量，数学期望 $\mu = E[X] \in (0, \infty)$，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t\ \text{时处于状态}\ j) = \frac{\mu_j}{\mu_1 + \cdots + \mu_r}.$$

证明.
当 $j=1$ 时，把状态 1 称为开状态，把其余的状态统称为关状态. 这相当于在开关系统中

$$U_i = U_{i1},\ V_i = U_{i2} + \cdots + U_{ir},\ i = 1, 2, \cdots .$$

利用定理 4.1 我们有结论成立.
当 $j=r$ 时，把状态 $1, 2, \cdots, r-1$ 都称为开状态，把状态 r 称为关状态. 这相当于在开关系统中

$$U_i = U_{i1} + \cdots + U_{i,r-1},\ V_i = U_{ir},\ i = 1, 2, \cdots .$$

利用定理 4.1 我们有结论成立.

证明.

当 $1 < j < r$ 时，对 $i = 1, 2, \cdots$，引入

$$U_i = U_{i1} + \cdots + U_{i,j-1},\ W_i = U_{ij},\ V_i = U_{i,j+1} + \cdots + U_{ir},$$

则 $X_i = U_i + W_i + V_i$. 将 $\{N(t)\}$ 视为有 U, W, V 三种状态的工作状态，则有

$$P(t\text{时处于状态 } U) + P(t\text{时处于状态 } W) + P(t\text{时处于状态 } V) = 1.$$

证明.

由上面刚得到的结论我们有

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P(t\text{时处于状态 } j) = & \lim_{t\to\infty} P(t\text{时处于状态 } W) \\
= & 1 - \lim_{t\to\infty} P(t\text{时处于状态 } U) - \lim_{t\to\infty} P(t\text{时处于状态 } V) \\
= & 1 - \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_{j-1}}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r} - \frac{\mu_{j+1} + \cdots + \mu_r}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r} \\
= & = \frac{\mu_j}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r}.
\end{aligned}
$$

□