第 13 讲 延迟更新过程

平衡更新过程

延迟更新过程

延迟开关系统

习题讲解

在实际问题中，对于更新过程 $\{N(t)\}$ 的记录或观测有时不是从 $t=0$ 开始的.如果更新过程在很久以前就开始了，从 t_0 开始记录的更新过程的第一个更新间隔 $X_1 = R(t_0)$ 的分布函数近似等于

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(s)ds,\ x \geq 0. \tag{1.1}$$

如果更新过程已经有无穷长的历史，则在时刻 t 重新记录的更新过程的第一个更新间隔 X_1 有分布函数 (1.1)，其余的更新间隔 $\{X_j | j \geq 2\}$ 依然是来自总体 X 的随机变量.

定义 1.1

设 X 和 X_1 是非负随机变量，分布函数分别是 $F(x)$ 和由 (1.1) 定义的 $F_e(x)$. 如果 $\{X_j j \geq 2\}$ 是来自总体 X 的随机变量，和 X_1 独立，则称以 $\{X_j | j \geq 1\}$ 为更新间隔的更新过程

$$N_e(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I[S_j \leq t],\ t \geq 0$$

为平衡更新过程，称 X_j 为第 j 个更新间隔，称

$$S_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_j$$

为第 j 个更新时刻.

对于平衡更新过程也可以定义时刻 t 的剩余寿命 $R_e(t)$. 由于平衡更新过程是有无穷长历史的更新过程，所以对于 $t \geq 0$，t 时的剩余寿命 $R_e(t)$ 应当有分布函数 $F_e(x)$，此外，$N_e(t+s) - N_e(t)$ 是具有无穷长历史的更新过程在区间 $(t, t+s]$ 中的更新次数，应当与 t 无关，所以平衡更新过程应当具有平稳增量性.

定理 1.2

平衡更新过程 $\{N_e(t)\}$ 是平稳增量过程，对于 $t \geq 0$，剩余寿命 $R_e(t)$ 和 X_1 有相同的分布函数 $F_e(x)$.

例 1.3

强度为 λ 的泊松过程是平衡更新过程.

证明.
泊松过程的更新间隔 X 服从指数分布. 由指数分布的无记忆性知剩余寿命 $R(t)$ 和 X 同分布，于是 $X_1 \sim F_e(x) = F(x)$. $\square$

具有平稳增量的计数过程又称为平稳点过程. 平衡更新过程是平稳点过程.

平衡更新过程

延迟更新过程

延迟开关系统

习题讲解

定义 2.1

设 X 和 X_1 是非负随机变量，$\{X_j|j \geq 2\}$ 是来自总体 X 的随机变量，X_1 和总体 X 独立. 称以 $\{x_j\}$ 为更新间隔的更新过程

$$N_D(t) = \sum_{j=1}^{\infty} 1[S_j \leq t],\ t \geq 0$$

为延迟更新过程，称 X_j 为第 j 个更新间隔，称

$$S_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_j$$

为第 j 个更新时刻.

容易理解，如果 X_1 也和 X 同分布，则 $N_D(t)$ 简化成更新过程. 当 X 有分布函数 $F(x)$，X_1 的分布函数是 $F_e(x)$ 时，$N_D(t)$ 是平衡更新过程.

设 $G(x) = P(X_1 \le x)$，$F(x) = P(X \le x)$. 用 $m_D(t) = E[N_D(t)]$ 表示延迟更新过程的更新函数，用 F_0 表示常数 0 的分布函数，则有

$$m_D(t) = \sum_{j=1}^{\infty} E[I[S_j \le t]] = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1 + (S_j - X_1) \le t) = \sum_{j=1}^{\infty} G * F_{j-1}(t).$$

对于延迟更新过程，也可以定义 t 时刻的年龄 $A_D(t)$ 和剩余寿命 $R_D(t)$ 如下:

$$A_D(t) = t - S_{N(t)},\ R_D(t) = S_{N(t)+1} - t.$$

引入 $X_D(t) = A_D(t) + R_D(t)$，则 $X_D(t)$ 是 t 时服役的部件的寿命.

延迟更新过程的极限定理

设总体 X 有分布函数 $F(t)$，数学期望 $\mu = E[X]$，X_1 有分布函数 $G(x)$. 以下结果成立：

(1) 更新函数 $m_D(t) = \sum_{m=1}^{\infty} G * F_{n-1}(t)$ 是更新方程

$$m(t) = G(t) + \int_0^t m(t-s)dF(s)$$

的唯一局部解；

(2) 如果 $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) < \infty$，则有中心极限定理

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N_D(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}\right) = \Phi(x),\ x \in (-\infty, \infty),$$

其中 $\Phi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的分布函数；

(3) 当 $t \to \infty$ 时，$\frac{N_D(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$ a.s.；

(4) 当 $t \to \infty$ 时，$\frac{m_D(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$；

(5) 如果 X 不是格点随机变量，则当 $t \to \infty$ 时，

$$m_D(t+a) - m_D(t) \to a/\mu;$$

(6) 设 X 和 X_1 是有相同周期 d 的格点随机变量，则

$$\lim_{n\to\infty} [m_D(nd) - m_D(nd-d)] = d/\mu;$$

(7) 设 X 不是格点随机变量，$\mu < \infty$，$h(x)$ 直接黎曼可积，则

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty h(t-x) dm_D(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(x) dx;$$

(8) 对 $t \geq x \geq 0$，$P(A_D(t) \geq x) = \overline{G}(t) + \int_0^{t-x} \overline{F}(t-s) dm_D(s)$;

(9) 对 $t, x \geq 0$，$P(R_D(t) > x) = \overline{G}(t+x) + \int_0^t \overline{F}(t-s+x) dm_D(s)$;

(10) 设 X 不是格点随机变量，则有

$$\lim_{t\to\infty} P(A_D(t)\le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(s)ds,$$

$$\lim_{t\to\infty} P(R_D(t)\le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(s)ds,$$

$$\lim_{t\to\infty} P(A_D(t)\le x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(s)ds;$$

(11) 设 X 不是格点随机变量，$E[X_1]<\infty$，$\sigma^2=\mathrm{Var}(X)<\infty$，则有

$$\lim_{t\to\infty} E[A_D(t)] = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu},$$

$$\lim_{t\to\infty} E[R_D(t)] = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu},$$

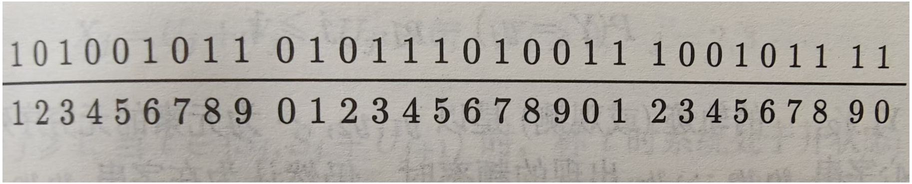
$$\lim_{t\to\infty} \left(m_D(t)-\frac{t}{\mu}\right) = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}-\frac{\mu_1}{\mu}.$$

例 2.2

气象卫星利用二进制数据把搜集的气象资料传回地面气象站. 根据历史资料知道气象站将以概率 p 接收到信号 1, 以概率 $q = 1 - p$ 接收到信号 0. 接收到的信号构成一个 0-1 序列: $Y_1, Y_2, \cdots$. 气象专家关心接收信号中字串 01011 出现的频率 f_0. 试在独立同分布的假设下计算 f_0.

证明.

根据题意，$\{Y_i\}$ 是独立同分布的随机变量，服从两点分布 $P(Y_i = 1) = p$，$P(Y_i = 0) = q$. 每当字符串 01011 结束时，认为有一个更新发生. 例如接收信号是下图的第一行时 (第二行是序号)，更新



1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

□

在 $S_1 = 9$，$S_2 = 14$，$S_3 = 28$ 处发生，更新间隔是 $X_1 = S_1 = 9$，$X_2 = S_2 - S_1 = 5$，$X_3 = S_3 - S_2 = 14$. 用 $N(n)$ 表示前 n 个信号中的更新次数，用 $[t]$ 表示 t 的整数部分，则

$$N(t) = N([t]),\ t \geq 0$$

是一个延迟更新过程，且 $f_0 = 1/EX_2$.

更新在 $t = n$ 处发生的充分必要条件是

$$(Y_{n-4}, Y_{n-3}, Y_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n) = (0, 1, 0, 1, 1).$$

于是

$$\begin{aligned} P(n\text{处有更新}) &= P((Y_{n-4}, Y_{n-3}, \cdots, Y_n) = (0,1,0,1,1)) \\ &= p^2q^2, \ \ n \geq 5, \\ P(n\text{处无更新}) &= P((Y_{n-4}, Y_{n-3}, \cdots, Y_n) \neq (0,1,0,1,1)) \\ &= 1 - p^3q^2, \ \ n \geq 5. \end{aligned}$$

X_1, X_2 都是周期为 1 的格点随机变量. 根据 (6),

$$
\begin{aligned}
p^3q^2 &= P(n\text{处有更新}) = P(N_D(n-1,n]=1) \\
&= E[N_D(n) - N_D(n-1)] \\
&= m_D(n) - m_D(n-1) \to \frac{1}{EX_2} \ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

于是对于字串 01011 的平均等待时间为 $EX_2 = 1/(p^3q^2)$，字串 01011 出现的概率

$$f_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{N_D(t)}{t} = p^2q^2.$$

例 2.3

如果 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是来自总体 Y 的随机变量，

$$P(Y = y_j) = p_j, \ j \geq 1,$$

则 $Y_1, Y_2, \cdots$ 的轨迹 (或观测) 是以 $y_1, y_2, \cdots$ 为元素的无穷序列. 当关心字串 $y_1 y_2 \cdots y_r$ 出现的频率时，仍然认为在字串 $y_1 y_2 \cdots y_r$ 结束时有一个更新发生.

用 $N(n)$ 表示前 n 个信号中的更新次数，用 $[t]$ 表示 t 的整数部分，则 $\{N([t]), t \geq 0\}$ 是延迟更新过程. 更新在 $t = n$ 处发生的充分必要条件是 $\mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_r$，其中

$$\mathbf{Y}_n = (Y_{n-r+1}, Y_{n-r}, \cdots, Y_n),\ \mathbf{y}_r = (y_1, y_2, \cdots, y_r).$$

于是

$$P(n\text{处有更新}) = P(\mathbf{Y}_n = \mathbf{y}_r) = p_1 p_2 \cdots p_r,\ \ n \geq r,$$
$$P(n\text{处无更新}) = 1 - p_1 p_2 \cdots p_r,\ \ n \geq r.$$

更新间隔 X_1, X_2 都是周期为 1 的格点随机变量. 于是

$$\begin{aligned}
&P(n\text{处有更新})\\
=&E[N_D(n)-N_D(n-1)]\\
=&m_D(n)-m_D(n-1)\\
\to&\frac{1}{EX_2}\ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

于是得到平均等待间隔 $EX_1 = 1/(p_1p_2\cdots p_r)$，字串 $y_1y_2\cdots y_r$ 出现的频率 $f_0 = p_1p_2\cdots p_r$.

完全类似地可以得到对字符串 $y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_r}$ 的平均等待时间为

$$EX_2 = \frac{1}{p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_r}}.$$

于是字串 $y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_r}$ 出现的频率是 $f_0 = p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_r}$.

设 $\{N(t)\}$ 是以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的延迟更新过程，更新时刻 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. 又设 (U_i, V_i) $(i = 2, 3, \cdots)$ 是来自总体 (U, V) 的随机变量，使得

$$X_j = U_j + V_j,\ U_j \geq 0,\ j = 2, 3, \cdots .$$

对于 $j \geq 1$，当 $t \in [S_j, S_j + U_{j+1})$ 时，称 t 时系统处于开状态；当 $t \in [S_j + U_{j+1}, S_{j+1})$ 时，称 t 时系统处于关状态. 则得到了一个有延迟的开关系统，简称延迟开关系统.

定理 3.1

对于 $\mu_U = E[U] < \infty$，$\mu_V = E[V] < \infty$，如果 $X = U + V$ 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t\text{ 时开}) = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V},$$
$$\lim_{t\to\infty} P(t\text{ 时关}) = \frac{\mu_V}{\mu_U + \mu_V}.$$

例 3.2

一部电话是一个开关系统，占线时关状态，占线时为开状态. 一个信息咨询台的 m 部电话相互独立地工作着，每部电话是一个分系统. 第 k 部电话的开状态有数学期望 μ_k，关状态有数学期望 λ_k. 当所有电话都占线时称咨询台处于关状态，否则称为开状态. 于是咨询台也构成了一个开关系统. 对于充分大的 t，计算 t 时刻是关状态的概率.

解.

本问题中，所有的更新间隔都是非格点随机变量. 用 $V_j(t)$ 表示第 j 部电话在 t 时处于关状态，利用定理 3.1 我们有

$$\lim_{t\to\infty} P(V_j(t)) = \frac{\lambda_j}{\mu_j+\lambda_j}.$$

对于咨询台来讲，当 t 充分大后，有

$$P(t\ \text{时关}) = P(\bigcap_{j=1}^{m} V_j(t)) = \prod_{j=1}^{m} P(V_j(t)) \approx \prod_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\mu_j+\lambda_j}.$$

□

在本问题中，子系统的并联构成了总系统，如果把 $\lim_{t\to\infty} P(t \text{ 时开})$ 称为稳定状态下总系统的可靠度，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t \text{ 时开}) \approx 1 - \prod_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\mu_j + \lambda_j}.$$