第 14 讲 有偿更新过程

有偿更新过程

例子

用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的更新过程，如果在第 j 个更新间隔 X_j 结束时有更新费用 Y_j 发生，则在 $[0, t]$ 发生的总费用是

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j.$$

称 $\{M(t)|t \geq 0\}$ 为有偿更新过程.

有偿更新过程

例子

以下假设 $(X_j, Y_j), (j = 1, 2, \cdots)$ 是来自总体 (X, Y) 的随机向量，

$$\frac{M(t)}{t}$$

是 $[0, t]$ 中的平均费用. 由于第一个更新间隔的费用对 $M(t)/t$ 的影响随着 t 的增加逐步耗尽，而每个更新间隔的平均费用是

$$\frac{E[Y]}{E[X]},$$

所以应当有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{E[Y]}{E[X]} \ a.s..$$

于是对于充分大的 t，时间段 $(t, t+a]$ 中的平均费用应当是

$$E[M(t+a) - M(t)] = a\frac{E[Y]}{E[X]}.$$

下面我们来严格证明这些结论.

定理 1.1

对于有偿更新过程 $\{N(t)\}$，设 $\mu_X = E[X] < \infty$. $\mu_Y = E[Y] < \infty$，a 是正常数，则

(1) $\lim_{t\to\infty} M(t)/t = \mu_Y/\mu_X$ a.s.；

(2) $\lim_{t\to\infty} E[M(t)]/t = \mu_Y/\mu_X$；

(3) 当 X 不是格点随机变量时，有

$$\lim_{t\to\infty}(E[M(t+a)] - E[M(t)]) = a\frac{\mu_Y}{\mu_X}.$$

证明.
利用 $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ a.s. 以及

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[X]}\ a.s.,\ \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j}{N(t)} = E[Y]\ a.s.,$$

我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j = \frac{E[Y]}{E[X]}\ a.s.,$$

这就证明了 (1).

证明.
为了方便，只对 $\{Y_j\}$ 与 $\{X_j\}$ 独立的情况证明结论 (2) 和 (3). 因为更新过程 $\{N(t)\}$ 由更新间隔 $\{X_j\}$ 决定，与 $\{Y_j\}$ 独立，所以利用瓦尔德定理我们有

$$E[M(t)] = E[\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j] = E[N(t)]E[Y],$$

两边除以 t 后，利用基本更新定理可得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[M(t)]}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} E[Y] = \frac{E[Y]}{E[X]}.$$

这就证明了 (2).

证明.

又注意到

$$E[M(t+a)]-E[M(t)] = E[N(t+1)]E[Y]-E[N(t)]E[Y] = (m(t+a)-m(t))E[Y],$$

其中 $m(t) = E[N(t)]$ 是更新函数. 利用布莱克威尔定理可以得到结论 (3). $\square$

推论 1.2

对于延迟开关系统，当 $\mu_U + \mu_V < \infty$ 时，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{[0,t] \text{ 内的开状态时间长度}}{t} = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V} \quad a.s..$$

证明.

用 $U(t)$ 表示 $[0,t]$ 内的开状态时间长度，则关于有偿更新过程 $M(t)=\sum_{j=1}^{N(t)}U_j$ 有关系式

$$M(t)\le U(t)\le M(t)+U_{N(t)+1}.$$

因为当 $t\to\infty$ 时，

$$\frac{M(t)}{t}\to\frac{E[U]}{E[X]}=\frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_V}\quad a.s.,$$

$$\begin{aligned}\frac{M(t)+U_{N(t)+1}}{t}&=\frac{N(t)+1}{t}\Big(\frac{1}{N(t)+1}\sum_{j=1}^{N(t)+1}U_j\Big)\\&\to\frac{1}{E[X]}E[U]=\frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_V}\quad a.s.,\end{aligned}$$

所以结论成立. $\square$

有偿更新过程

例子

例 2.1

在北京市区丢失自行车是司空见惯的事情. 一位职工每天骑自行车上下班，自行车丢失或损坏后马上用 Y 元购一辆新车继续使用. 设他靠骑车每周能节省 Z 元公交车费.

(1) 他平均多长时间更新一辆自行车才能保证汽车比乘车更省钱.

(2) 如果自行车的平均单价是 180 元，每周的平均乘车费是 15 元，平均每年更新一辆自行车，他每周平均能节省多少元?

解.

设 $(X_j, Y_j, Z_j)(j=1,2,\cdots)$ 是来自总体 (X,Y,Z) 的随机向量，其中 $\{X_j\}$ 表示自行车的更新间隔，单位是周；Y_j 是第 j 次更新自行车的费用，单位是元；Z_j 是第 j 周的乘车费，单位是元. 用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的更新过程. $[0,t]$ 周内购车的费用是

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j.$$

$[0,t]$ 周内的乘车费

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{[t]} Z_j + (t-[t]) Z_{[t]+1}.$$

于是 $[0,t]$ 内骑车节省费用 $Z(t)-M(t)$，每周节省的费用是

$$\frac{Z(t)-M(t)}{t}.$$

(1) 根据问题的背景知道所有随机变量的数学期望都存在. 在不等式

$$\sum_{j=1}^{[t]} Z_j \le Z(t) \le \sum_{j=1}^{[t]+1} Z_j$$

的各项同除以 t 后，利用强大数律得到

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Z(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{[t]} Z_j = EZ \ a.s..$$

于是该职工每周平均节省

$$M = \lim_{t\to\infty} \frac{Z(t)-M(t)}{t} = EZ - \frac{EY}{EX}.$$

于是，只有当 $EZ > EY/EX$ 时才能够省钱.

(2) 当 $EY = 180$ 元，$EZ = 15$ 元，$EX = 365/7$ 周时，有

$$M = EZ - \frac{EY}{EX} = 15 - \frac{180 \times 7}{365} = 11.5479,$$

每周平均节省 11.55 元.

例 2.2

设波音 737 飞机的使用寿命为服从分布 $G(s)$ 的一个随机变量 T (单位: 年). 飞机购置费为 a 元, 飞机在服役期间每年创造利润 b 元. 如果使用中飞机损坏, 除了需要购置新飞机, 还要承担额外损失 c 元. 为保险起见, 航空公司决定飞机使用 s 年后就放弃不用, 购置新的波音 737, 长期实施以上策略, 一架飞机每年平均贡献多少利润?

解.

我们用有偿更新过程解决这个问题. 设第 n 架飞机的使用寿命为 T_n 年，则这架飞机的实际使用年限为

$$X_n = \min(T_n, s).$$

放弃第 n 架飞机时的获利为

$$Y_n = \begin{cases} sb - a, & \text{当 } T_n > s, \\ T_n b - a - c, & \text{当 } T_n \le s. \end{cases}$$

用示性函数写出来就是

$$Y_n = (sb - a)I[T_n > s] + (T_n b - a - c)I[T_n \le s].$$

解.

当 $T_1, T_2, \cdots$ 是来自总体 T 的随机变量时，(X_j, Y_j) 就是独立同分布的随机向量. 用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的更新过程，则在时间段 $[0, t]$ 中的获利为

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j + A(t)b,$$

其中 $A(t) = t - S_{N(t)} \leq s$. 于是很长时间后，一架飞机每年平均贡献的利润为

$$\frac{E[M(t)]}{t} \approx \frac{E[Y_1]}{E[X_1]}.$$

解.

用 $G(x) = P(T \le x)$ 表示 T 的分布函数时，有

$$
\begin{aligned}
E[X_1] &= \int_0^\infty P(X_1 > x)dx = \int_0^\infty P(T_1 > x, s > x)dx \\
&= \int_0^s P(T_1 > x)dx = \int_0^s \overline{G}(x)dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[Y_1] &= (sb-a)E(I[T_n > s]) + bE(T_n I[T_n \le s]) - (a+c)E(I[T_n \le s]) \\
&= (sb-a)\overline{G}(s) + b\int_0^s x dG(x) - (a+c)G(s).
\end{aligned}
$$

于是一架飞机平均每年贡献的利润为

$$
h(s) = \frac{(sb-a)\overline{G}(s) + b\int_0^s x dG(x) - (a+c)G(s)}{\int_0^s \overline{G}(x)dx}.
$$

要想得到最大利润，只要取 s 为 $h(s)$ 的最大值点即可. $\square$

例 2.3

某车站的乘客按照更新间隔时间均值为 μ 的更新过程到达. 车站当乘客数量达到 x 时发一班车. 当有 n 个乘客等候时，候车室会产生每小时 cn 元的费用. 给出候车室的长程平均费用计算公式. 设每开出一班车，车站会产生 a 元的费用. 给出车站长程平均费用计算公式. 问 x 取何值时车站的长程平均费用最低?

解.

用 T_n 表示第 n 位与第 $n+1$ 位乘客到达的间隔时间. 根据假设我们有 $E[T_n]=\mu$. 在此模型中，每发出一班车就称完成了一次循环. 用 ξ_1 表示第一班车发车的时刻，则每次循环的期望时间为 $E[\xi_1]=x\mu$. 用 η_1 表示到第一班车发车时候车室的费用. 则 $\eta_1=c[T_1+2T_2+\cdots+(x-1)T_{x-1}]$，故在每个循环中候车时的期望费用为

$$E[\eta_1]=c\mu[1+2+\cdots+(x-1)]=\frac{1}{2}c\mu x(x-1).$$

所以候车室的长程费用为

$$f(x)=\frac{E[\eta_1]}{E[\xi_1]}=\frac{c\mu x(x-1)}{2\mu x}=\frac{1}{2}c(x-1).$$

车站的长程平均费用为

$$g(x)=\frac{a+c\mu x(x-1)/2}{\mu x}=\frac{2a+c\mu x(x-1)}{2\mu x}.$$

证明.
对上式求导我们有

$$g'(x) = \frac{2c\mu^2 x(2x-1) - 4a\mu - 2c\mu^2 x(x-1)}{(2\mu x)^2} = \frac{2c\mu^2 x^2 - 4a\mu}{(2\mu x)^2}.$$

令 $g'(x) = 0$，得 $c\mu x^2 - 2a = 0$. 该方程的解为

$$x = \sqrt{2a/c\mu}.$$

所以，取 x 为 $[\sqrt{2a/c\mu}]$ 和 $[\sqrt{2a/c\mu}] + 1$ 两者中代入 g 中取值更小的那一个，此时车站的长程平均费用最低. □