目录

1. 概率与随机变量 7

1.1. 事件与概率 7

1.1.1 概率的定义 7

1.1.2 概率的基本性质 7

1.2. 随机向量及其分布 10

1.2.1 总体与样本 12

1.3. 随机变量举例 13

1.4. 习题 14

2. 期望与方差，概率极限定理 16

2.1. 随机变量的数学期望和方差 16

2.2. 条件概率和条件数学期望 17

2.3. 数学期望的计算公式 18

2.4. 特征函数与概率极限定理 20

2.4.1 特征函数 20

2.5. 概率不等式 21

2.5.1 概率极限定理 22

2.6. 次序统计量 23

2.7. 习题 25

3. 随机过程基本概念 26

3.1. 随机过程定义 26

3.2. 随机过程概率分布 27

3.3. 随机过程的数字特征 27

3.4. 特殊过程 29

3.5. 指数分布 31

3.5.1 指数分布 31

3.5.2 指数分布的性质 32

3.5.3 一些结论和例子 33

3.6. 习题 34

4. 泊松过程 36

4.1. 泊松分布 36
4.2. 计数过程 36
4.3. 泊松过程 37
4.4. 泊松过程的数字特征 40
4.5. 泊松过程的联合分布 41
4.6. 长时间极限行为 41
4.7. 习题 42

5. 泊松呼叫流 44

5.1. 呼叫流的概率分布 44
5.2. 等待间隔 X_n 的分布 47
5.3. 到达时刻的条件分布 48
5.4. 简单呼叫流 50
5.5. 习题 51

6. 年龄和剩余寿命，泊松过程的汇合与分流 52

6.1. 年龄和剩余寿命 52
6.2. 泊松过程的汇合 54
6.3. 泊松过程的分流 55
6.4. 应用: 追踪感染 HIV 的人数 60
6.5. 习题 61

7. 泊松过程的推广 62

7.1. 复合泊松过程 62
7.2. 条件 (混和) 泊松过程 64
7.3. 非时齐泊松过程 65
7.4. 例题 68
7.5. 习题 69

8. 第一部分总结：概率论基础，随机过程简介与泊松过程 70

8.1. 课程第一部分总结 70
8.2. 例子 70
8.3. 习题 76

9. 更新过程 77

9.1. 更新过程 77
9.2. 更新过程的极限定理 77
9.3. 更新函数 80
9.4. 更新流 83
9.5. 习题 84

10. 停时与更新定理 85

10.1. 停时 85
10.2. 基本更新定理 87
10.3. 布莱克威尔定理 88
10.4. 关键更新定理 90
10.5. 习题 92

11. 更新方程与开关系统 93

11.1. 卷积及其性质 93
11.2. 更新方程 95
11.3. 分支过程 96
11.4. 开关系统 98
11.5. 多个状态的系统 100
11.6. 习题 101

12. 年龄与剩余寿命 102

12.1. 年龄 $A(t)$ 的分布 102
12.2. 剩余寿命 $R(t)$ 的分布 102
12.3. t 时服役部件的寿命分布 103
12.4. $S_{N(t)}$ 的分布函数 104
12.5. 总结 104
12.6. 年龄，寿命与更新间隔的比较 105
12.6.1 $A(t)$，$R(t)$ 和更新间隔的比较 106
12.6.2 $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔 106
12.7. $EA(t)$，$E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限 107
12.8. 更新过程的汇合 109
12.9. 习题 110

13. 延迟更新过程与有偿更新过程 111

13.1. 平衡更新过程 111
13.2. 延迟更新过程 112
13.3. 延迟开关系统 114
13.4. 有偿更新过程 115
13.5. 习题 118

14. 第二部分总结：更新过程 120

14.1. 课程第一部分总结 120
14.2. 例子 120

15. 马氏链及其转移概率 121

15.1. 马氏链 121
15.2. 马氏链的基本性质 121
15.3. K-C 方程 124
15.4. 初始分布和 X_n 的分布 126
15.5. 习题 127

16. 状态命名和周期 128

16.1. 状态的互通性 128
16.2. 常返与非常返态 128
16.3. 正常返与零常返状态 131
16.4. 周期及其性质 132
16.5. 遍历状态 133
16.6. 习题 134

17. 状态空间的分解，简单随机游动的常返性 135

17.1. 状态空间的分解 135
17.2. 简单随机游动的常返性 136
17.3. 质点在常返等价类中的转移 138

18. 不变分布 141

19. 平稳性和平稳可逆性 146

19.1. 平稳性 146
19.2. 平稳可逆性 147
19.3. 平稳可逆分布的计算 149

20. 离散时间分支过程 152

20.1. 离散时间分支过程 152

20.2. 灭绝概率 152

21. 连续时间马氏链 155

21.1. 连续时间马氏链的定义 155

21.2. 泊松过程是马氏链 156

22. 转移速率矩阵 158

23. 马氏链的结构 161

23.1. 保守马氏链 161

23.2. 马氏链的结构 163

24. 柯尔莫哥洛夫方程 165

24.1. 向后和向前方程 165

24.2. 解柯尔莫哥洛夫方程 165

25. 生灭过程 169

25.1. 引入 169

25.2. 线性生灭过程 169

25.3. 生灭过程 171

25.4. 线性纯生过程 172

25.5. 简单的传染病模型 173

26. 马氏链的极限分布 176

26.1. $p_{ij}(t)$ 的极限 176

26.2. 马氏链的 h 骨架和状态分类 176

26.3. 平稳不变分布 177

27. 布朗运动 180

27.1. 布朗运动 180

27.2. 二维布朗运动 181

27.3. 布朗运动的简单性质 182

27.4. 首中时和最大值的分布 182

27.5. Arcsin 律 184

28. 布朗桥与经验过程，布朗运动的轨迹，随机游动与布朗运动 186

28.1. 布朗桥 186
28.2. 经验过程 186
28.3. 轨迹的不可微 187
28.4. 轨迹的无限长 187
28.5. 重对数律 188
28.6. 随机游动与布朗运动 189

29. 随机积分 190

29.1. 鞅：定义与例子 190
29.2. 关于随机游动的积分 192
29.3. 关于布朗运动的积分 192

第 1 讲　概率与随机变量

本讲中，我们将回顾一些在概率与统计课程中已经介绍过，在本课程中经常会用到的概念.

1.1　事件与概率

1.1.1　概率的定义

通常把按照一定的想法去做的事情称为**试验**，把试验的可能结果称为**样本点**，称样本点的集合为**样本空间**. 对于一个特定的试验，以后总用 Ω 表示样本空间，用 ω 表示样本点，这时

$$\Omega = \{\omega|\omega\text{是试验的样本点}\}.$$

在概率论中，事件是样本空间 Ω 的子集. 在实际问题中人们往往并不需要关心 Ω 的所有子集，只要把关心的子集称为事件就够了. 但事件作为 Ω 的子集，必须满足以下三个条件：

(1) Ω 是事件；

(2) 若 A 是事件，则 A^c 是事件；

(3) 若 A_j 是事件，则 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ 是事件.

若 Ω 的子集族满足以上几点, 则称该子集族是一个 **σ-域**.

对于事件 A，如果用 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率，则 $P(A)$ 满足以下条件：

(1) **非负性**：对任何事件 A，$P(A) \geq 0$；

(2) **完全性**：$P(\Omega) = 1$；

(3) **可列可加性**：对于互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

设 Ω 是一个样本空间，用 $\mathcal{F}$ 表示全体事件，P 表示一个概率，则称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个**概率空间**. P 可以视为 $\mathcal{F}$ 到 $[0.1]$ 上的一个函数.

1.1.2　概率的基本性质

下面是概率 P 的基本性质：

(1) $P(\emptyset) = 0$.

(2) **有限可加性**：如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j).$$

(3) **单调性**：如果 $B \subset A$，则

$$P(A) - P(B) = P(A\backslash B) \geq 0.$$

(4) **加法公式**：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(5) **次可加性**：$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$.

定义 1.1

设 A 和 B 是两个事件. 如果 $P(B)>0$，则在给定事件 B 发生的条件下事件 A 的**条件概率**为

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{1.1}$$

定义 1.2

称事件 A 与 B **独立**, 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$. 对于一列事件 $A_1,\cdots,A_n$, 我们称它们 **相互独立**, 如果对任意 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$, 有

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k})=P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k}).$$

如果上述条件仅要求对 $k=2$ 成立, 则称它们 **两两独立**.

由定义可知一列相互独立的随机变量是两两独立的, 但反过来不一定成立.

定理 1.3

对已知的正概率事件 A，定义条件概率 $P_A(B)=P(B|A)$，$B\in\mathcal{F}$，则 P_A 是概率，$(\Omega,\mathcal{F},P_A)$ 是概率空间. 当 $P(A\cap B)>0$ 时，有

$$P_A(C|B)=P(C|A\cap B).$$

命题 1.4

若事件 A,B 独立, 且 $P(B)>0$, 则

$$P(A|B)=P(A).$$

注意在上述命题中的要求 $P(B)>0$ 是很重要的. 即使对 $P(B)=0$ 时我们可以以某种方式定义条件概率 $P(A|B)=P(A)$. 结论 $P(A|B)=P(A)$ 不一定成立.

定理 1.5: 乘法公式

我们有

$$P(B_1B_2\cdots B_n)=P(B_1)P(B_2|B_1)\cdots P(B_n|B_1B_2\cdots B_{n-1}).$$

当 $P(A)>0$ 时，我们有

$$P(B_1B_2\cdots B_n|A)=P(B_1|A)P(B_2|B_1A)\cdots P(B_n|B_1B_2\cdots B_{n-1}A).$$

定理 1.6: 全概率公式

如果事件 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容且概率均为正，则当 $B\subset\bigcup_{j=1}^\infty A_j$ 或者 $\bigcup_{j=1}^\infty A_j=\Omega$ 时，有

$$P(B)=\sum_{j=1}^\infty P(A_j)P(B|A_j),$$

$$P(B|A)=\sum_{j=1}^\infty P(A_j|A)P(B|AA_j),\ \text{当 } P(A)>0 \text{ 时}.$$

定理 1.7: 贝叶斯公式

设 $\{B_1, B_2, \cdots\} \subseteq \mathscr{F}$ 为 Ω 的一个划分, 而 $A \in \mathscr{F}$ 满足 $P(A) > 0$. 则对任意 $n \geq 1$ 有

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{P(A)} = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)P(A|B_k)}.$$

定理 1.8: 概率的连续性

如果 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$，则有

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),\ \ P(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

我们记

$$P(A_n \text{ i.o.}) = P(\text{有无穷多个 } A_j \text{ 发生}).$$

定理 1.9: Borel-Cantelli 引理

设 $A_1, A_2, \cdots$ 是一列事件.

(1) 如果 $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty$，则

$$P(A_n \text{ i.o.}) = 0.$$

(2) 如果 $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$ 且 $A_1, A_2, \cdots$ 相互独立, 则 $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$.

证明. 注意到 $A := \{A_n \text{ i.o.}\} = \cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} A_n$, 于是 $P(A) = \lim_{N\to\infty} P(\cup_{n=N}^{\infty} A_n)$.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 则当 $N \to \infty$ 时, $\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) \to 0$, 从而

$$P(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) \to 0.$$

于是 $P(A) = 0$.

(2) 如果 $A_1, A_2, \cdots$ 相互独立, 则

$$P(\bigcap_{n=N}^{M} A_n^c) = \prod_{n=N}^{M} (1 - P(A_n)) \leq \prod_{n=N}^{M} e^{-P(A_n)} = e^{-\sum_{n=N}^{M} P(A_n)},$$

其中不等号是因为对任意 $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x}$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, 则对任意 N, $\sum_{n=N}^{\infty} P(A_N) = \infty$, 则对任意 N, $\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) = \infty$, 从而

$$P(\cap_{n=N}^{\infty} A_n^c) = \lim_{N\to\infty} P(\cap_{n=N}^{M} A_n^c) \leq \lim_{M\to\infty} e^{-\sum_{n=N}^{M} P(A_n)} = e^{-\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n)} = 0.$$

因此 $P(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n^c) = 0$, 即 $P(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) = 1$. 最后, 令 $N \to \infty$ 便知 $P(A) = 1$. □

推论 1.10: 0-1 律

若 $A_1, A_2, \cdots$ 相互独立, 则 $P(A_n \text{ i.o.})$ 非 0 即 1.

下面我们来看 Borel-Cantelli 引理的一个应用.

定义 1.11

称实数 ξ 是**可以很好逼近的**, 如果存在正实数 τ 使得存在无穷多有理数 $\frac{p}{q}$, 满足

$$|\xi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\tau}}.$$

推论 1.12

可以很好逼近的实数全体的 Lebesgue 测度等于 0.

证明留做习题.

1.2 随机向量及其分布

随机变量 X 是定义在样本空间 Ω 上的函数，使得对于 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 的子集 A，$\{X \in A\}$ 是事件.

对于随机变量 X，称 $F(t) = P(X \leq t)$ 为 X 的**分布函数**. 分布函数是单调不减的右连续函数. 用 $F(t-)$ 表示 F 在 t 的左极限，有

$$P(X = t) = F(t) - F(t-),\ t \in (-\infty, \infty).$$

称 $\overline{F}(t) = P(X > t)$ 为 X 的**生存函数**. 于是

$$\overline{F}(t) = 1 - F(t) = P(X > t).$$

如果 $F(t)$ 是 X 的分布函数，若非负函数 $f(s)$ 使得对所有的 t，有

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds,$$

则称 $f(s)$ 为 F 或 X 的**密度函数**，称 X 是**连续型随机变量**. 这时对于 $(-\infty, \infty)$ 的子集 A，有

$$P(X \in A) = \int_A f(s)ds.$$

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是随机变量，则称 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是**随机向量**. 我们称 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n)$$

是 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**分布函数**. 如果

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

其中

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_j \to \infty, j \neq i} F(x_1, \cdots, x_n).$$

则称这 n 个随机变量是**独立**的. 若 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 X_i 具有相同的分布, 则称它们 **独立同分布**.

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是随机变量，则随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是定义在 Ω 上的一个多元函数. 对每个 $\omega \in \Omega$，

$$\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

是实数向量，称为 $\boldsymbol{X}$ 的**一次观测**或**一次实现**.

对于随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，如果有 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数 $f(\boldsymbol{x})=f(X_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得对 $\mathbb{R}^n$ 的任何子立方体

$$D=\{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)|a_i<x_i\le b_i,1\le i\le n\},$$

有

$$P(\boldsymbol{x}\in D)=\int_D f(\boldsymbol{x})dx_1\cdots dx_n,$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 是**连续型随机向量**，称 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的**联合密度**. 这时，可以证明对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任何区域 D，上式成立.

定理 1.13

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 有联合分布函数 $F(\boldsymbol{x})=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. $F(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的开区域 D 中有连续的 n 阶混合偏导数. 定义

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{\partial^n F(\boldsymbol{x})}{\partial x_n\cdots\partial x_2\partial x_1}, & \boldsymbol{x}\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

若下面的条件 (a)，(b) 之一成立：

(a) $P(\boldsymbol{X}\in D)=1$;

(b) $\int_D f(\boldsymbol{x})dx_1dx_2\cdots dx_n=1$.

则 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度.

对于随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$. 定义

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=(X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m).$$

以后用 $\boldsymbol{X}\sim f(\boldsymbol{x})$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 有联合密度 $f(\boldsymbol{x})$，用 $\boldsymbol{Y}\sim g(\boldsymbol{y})$ 表示 $\boldsymbol{Y}$ 有联合密度 $g(\boldsymbol{y})$.

定理 1.14

设 $\boldsymbol{X}\sim f(\boldsymbol{x})$，则

(1) X_j 有密度函数

$$f_j(x_j)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x})dx_1\cdots dx_{j-1}dx_{j+1}\cdots dx_n,$$

并且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充分必要条件是

$$f(\boldsymbol{x})=\prod_{j=1}^n f_j(x_j),\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n;$$

(2) 当 $\boldsymbol{Y}\sim g(\boldsymbol{y})$ 时，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\sim f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y});$$

(3) 当 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 都是离散随机向量时，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立的充分必要条件是对所有的 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, 有

$$P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})=P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}).$$

定理 1.15: Fubini 定理

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上的区域，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 D 上的非负函数或是满足条件

$$\int_D |g(x_1, x_2, \ldots, x_n)| dx_1 dx_2 \cdots dx_n < \infty$$

的函数，则对区域 D 上的 n 重积分

$$\int_D g(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

可以进行累次积分计算，且积分的次序可以交换.

引理 1.16

设 $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 有联合密度 $g(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{X} = (u_1(\boldsymbol{S}), u_2(\boldsymbol{S}), \cdots, u_n(\boldsymbol{S}))$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的函数，D 是 $\mathbb{R}^n$ 的区域使得 $P(\boldsymbol{X} \in D) = 1$. 如果有 D 上的 n 维向量值函数 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$，使得

(a) 对 $\boldsymbol{x} \in D$，有 $\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})\}$；

(b) $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 是 D 到其值域的可逆映射，偏导数连续，雅可比行列式的绝对值

$$|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{x}}| \neq 0, \ \ \boldsymbol{x} \in D, \ \ i = 1, 2, \cdots, m.$$

则 $\boldsymbol{X}$ 有联合密度

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} (g(\boldsymbol{s}(x))|\dfrac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{x}}|, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

定理 1.17

设数列 $\{a_j\}$ 绝对可和：$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$，函数列 $\{h_j(s)\}$ 一致有界：$\sup_{a \le s \le b} |h_j(s)| \le M$. 对于 $c \in [a, b]$，如果 $\lim_{s \in (a,b), s \to c} h_j(s) = h_j$，则

$$\lim_{s \in (a,b), s \to c} \sum_{j=0}^{\infty} a_j h_j(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j h_j.$$

1.2.1 总体与样本

在统计学中，我们把所要调查对象的全体叫做总体，把总体中的成员叫做个体. 当我们关心总体的某个指标时，就称这个指标为参数.

当 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 是总体的全部个体时，总体均值是

$$\mu = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_N}{N},$$

总体方差为

$$\sigma^2 = \frac{(y_1 - \mu)^2 + (y_2 - \mu)^2 + \cdots + (y_N - \mu)^2}{N}.$$

总体标准差是总体方差的开平方 $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. 总体均值、总体方差和总体标准差都是参数.

当 X 是从总体中随机抽样得到的个体时，X 是随机变量，X 的分布就是总体的分布. 如果对总体进行有放回的抽样，则得到独立同分布的，且和 X 同分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样

本. 在进行统计分析时，为了强调 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是随机变量，也称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的随机变量.

1.3 随机变量举例

例 1.18

如果 X 只取值 0 或 1，概率分布是

$$P(X=1)=p,\ P(X=0)=q,\ p+q=1,$$

则称 X 服从两点分布，或 *Bernoulli* 分布. 记做 $X \sim \mathcal{B}(1,p)$.

例 1.19

设某试验成功的概率为 p，$q=1-p$. 将该试验独立重复 n 次时，用 X 表示成功的次数，则 X 的概率分布为

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n.$$

此时称 X 服从二项分布，记做 $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

例 1.20

甲向一个目标独立重复射击，每次击中目标的概率是 $p=1-q>0$. 用 X 表示其首次击中目标的射击次数，则 X 的概率分布为

$$P(X=k)=q^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots, \tag{1.2}$$

这时称 X 服从几何分布，记为 $X \sim \mathrm{Geom}(p)$.

例 1.21

设 $X_1, X_2, \cdots, X_i$ 独立同分布，有共同的几何分布 (1.2). 将 $S_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_i$ 视为第 i 次击中目标时的射击次数，称其服从负二项分布：

$$P(S_i=j)=C_{j-1}^{i-1} q^{j-i} p^i,\ j \ge i.$$

例 1.22

如果随机变量 X 有概率分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots,$$

则称 X 服从参数是 λ 的泊松分布，简记为 $X \sim P(\lambda)$，这里 λ 是正常数.

例 1.23

设 X 是取值于 $[a,b]$ 上的连续型随机变量，我们称 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，记为 $X \sim U[a,b]$，

如果其概率密度函数为

$$f(x) = (b-a)^{-1}, a \le x \le b.$$

例 1.24

称连续型随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，记做 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$，如果 X 有密度函数

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0,$$

例 1.25

称连续型随机变量 X 服从均值 μ 和方差 σ^2 的正态分布，如果其概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\},\ x \in \mathbb{R}.$$

我们记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 特别地，如果 $X \sim N(0,1)$，则称 X 服从**标准正态分布**.
设 $\boldsymbol{\mu}$ 是 n 维常数列向量，B 是 $n \times m$ 常数矩阵，$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_m$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的随机变量，$\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_m)^T$. 如果

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + B\boldsymbol{\epsilon},$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 服从 n 元正态分布，记做 $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. 其中 $\Sigma = BB^T$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵 (见下一节).

命题 1.26

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 的充分必要条件是对任何常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，线性组合 $\sum_{j=1} a_j X_j$ 服从正态分布.

命题 1.27

当 $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 时，其分量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充分必要条件是他们互不相关，即 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0,\ j \neq i$.

1.4 习题

习题 1.1

假定生男孩和生女孩是等可能的. 如果一个家庭有两个孩子, 对于下面两种情况

(1) 老大是女孩,

(2) 至少一个是女孩,

分别求在相应条件下两个孩子都是女孩的概率.

习题 1.2

将一个球面的 10% 面积的区域涂成蓝色，其它部分涂成红色. 试证明，无论怎样上色，总是能找到一个内接正方体，使得其顶点的颜色全是红色.

习题 1.3

Alice 和 Bob 交替抛掷一枚均匀的硬币. 若 Alice 首先在上一次掷出反面的条件下，该次掷出正面，则 Alice 获胜; 若 Alice 首先在上一次掷出正面的条件下，该次掷出反面，则 Bob 获胜. 问在第 n 次抛掷后游戏结束的概率.

习题 1.4

证明推论 1.12.

习题 1.5

设 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $X_1, X_2, \cdots$ 是来自总体 X 的随机变量, 以及与总体 X 独立的随机变量 N 服从均值为 $1/p$ 的几何分布. 求 $Y = \sum_{j=1}^{N} X_j$ 的分布.

习题 1.6

设 X 有概率密度函数

$$f(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, \quad x \geq 0,$$

求 $Y = \ln X$ 的概率密度.

习题 1.7

设 $X \sim N(0,1)$, 求 X^2 的密度函数.

第 2 讲 期望与方差，概率极限定理

2.1 随机变量的数学期望和方差

设 X 有离散的概率分布

$$p_j = P(X = x_j),\ j = 0, 1, \cdots.$$

如果 $P(X \geq 0) = 1$ 或级数 $\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| p_j$ 收敛，则称 $E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p_j$ 为 X 的**数学期望**或**均值**.

设 X 是有密度函数 $f(x)$ 的随机变量. 如果 $P(X \geq 0) = 1$ 或 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| df(x) < \infty$, 则称 $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 为 X 的**数学期望**或**均值**.

设 $f_0(s)$ 是非负函数，如果随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可以分解成

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),\ x \in (-\infty, \infty),$$

其中 $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(s) ds$, $F_2(x)$ 是仅在至多可数多个点 x_j 处有跳跃高度 $P(X_j = x_j) = F(x_j) - F(x_j-)$ 的阶梯函数，则称 X 有**混合分布**. 如果 X 非负或

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_0(x) dx + \sum_{j \geq 1} |x_j| P(X = x_j) < \infty,$$

则称 X 的数学期望存在，并且定义 X 的数学期望为

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_0(x) dx + \sum_{j \geq 1} x_j P(X = x_j).$$

对于任何右连续的单调不减阶梯函数 $G(x)$，设 G 仅在至多可数多个点 x_j 处有跳跃. 对于另一函数 $g(x)$，如果

$$\sum_{j: x_j \in [a,b]} |g(x_j)| [G(x_j) - G(x_j-)] < \infty,\ a < b, \tag{2.1}$$

则称 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 G 可积，并定义积分

$$\int_a^b g(x) dG(x) = \sum_{j: x_j \in [a,b]} g(x_j) [G(x_j) - G(x_j-)].$$

按照上面的积分定义，如果 X 的数学期望存在，则可以把 X 的数学期望表示成

$$E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x dF_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} x dF_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

积分 (2.1) 有如下的基本性质：

(1) 若 $g(t), h(t)$ 都在 $[a, b]$ 上关于 G 可积，则有

$$\int_a^b (g(t) + h(t)) dG(t) = \int_a^b g(t) dG(t) + \int_a^b h(t) dG(t);$$

(2) 若 $g(t)$ 在 $[a, b]$ 上关于 G, F 可积，则有

$$\int_a^b g(t) d[G(t) + F(t)] = \int_a^b g(t) dG(t) + \int_a^b g(t) dF(t);$$

(3) 设 $F_n(t) = P(X_n \leq t)$，若 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty$ 对 $t < \infty$ 成立，则对于非负函数 $g(t)$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dF_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dm(t). \tag{2.2}$$

设 X 是一个随机变量，X 的*方差*定义为

$$\mathrm{Var}[X]=E[(X-E[X])^2]=E[X^2]-E[X]^2.$$

两个定义在相同样本空间上的随机变量 X 和 Y 称为*不相关*的，如果他们的**协方差**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[XY]-E[X]E[Y]$$

等于 0. 由定义可知独立的随机变量是不相关的. 然而，不相关的随机变量不一定是独立的.

命题 2.1

如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 都是定义在同一样本空间的随机变量，则有

$$\mathrm{Var}[\sum_{i=1}^n X_i]=\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^{j-1}\mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

例 2.2

设 X 服从两点分布：$X\sim\mathcal{B}(1,p)$. 我们有 $E[X]=p$，$\mathrm{Var}(X)=p(1-p)$.

例 2.3

如果 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自总体 $\mathcal{B}(1,p)$ 的样本，则 $\xi_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n\sim\mathcal{B}(n,p)$. 我们有 $E[\xi_n]=np$，$\mathrm{Var}(\xi_n)=npq$.

例 2.4

设随机变量 X 服从**几何分布**：$X\sim\mathrm{Geom}(p)$. 我们有 $E[X]=1/p$，$\mathrm{Var}(X)=q/p^2$.

例 2.5

设随机变量 X 服从**泊松分布**：$X\sim\mathcal{P}(\lambda)$，则 $E[X]=\lambda$，$\mathrm{Var}[X]=\lambda$.

例 2.6

设 $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$，则 $E[X]=1/\lambda$，$\mathrm{Var}(X)=1/\lambda^2$.

2.2 条件概率和条件数学期望

设 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 是随机向量，A 是随机事件. 如果 $g(\boldsymbol{y})=P(A|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})$，则定义

$$P(A|\boldsymbol{Y})=g(\boldsymbol{Y}),$$

并且称 $P(A|\boldsymbol{Y})$ 是已知 $\boldsymbol{Y}$ 时 A 的**条件概率**，简称为条件概率.

命题 2.7

条件概率有如下的基本性质：

$$E[P(A|\boldsymbol{Y})]=P(A).$$

设 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 是随机向量，X 是随机变量，满足 $E[|X|]<\infty$. 如果 $g(\boldsymbol{y})=E[X|\mathbf{Y}=\boldsymbol{y}]$，我们定义

$$E[X|\boldsymbol{Y}]=g(\boldsymbol{Y}),$$

并且称 $E[X|\boldsymbol{Y}]$ 是已知 $\boldsymbol{Y}$ 时 X 的**条件数学期望**. 条件数学期望有如下的基本性质：设 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 是随机向量，X,Z 是随机变量，满足 $E[|X|]<\infty$，$E[|Z|]<\infty$. 设 $h(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是一个实函数. 我们有

(1) $E[E[X|\boldsymbol{Y}]]=E[X]$；

(2) 当 X 与 $\boldsymbol{Y}$ 独立时，有 $E[X|\boldsymbol{Y}]=E[X]$;

(3) 当 Z 与 $(X,\boldsymbol{Y})$ 独立时，有 $E[XZ|\boldsymbol{Y}]=E[Z]E[X|\boldsymbol{Y}]$;

(4) 当 $Z=h(\boldsymbol{Y})$ 时，有 $E[XZ|\boldsymbol{Y}]=ZE[X|\boldsymbol{Y}]$;

(5) 对于常数 a,b，有 $E[aX+bZ|\boldsymbol{Y}]=aE[X|\boldsymbol{Y}]+bE[Z|\boldsymbol{Y}]$.

2.3 数学期望的计算公式

设 X 是一个随机变量，有分布函数 $F(x)$ 和生存函数 $\overline{F}(x)=1-F(x)$.

定理 2.8

当 X 只取非负整数值时，有

$$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k).$$

定理 2.9

如果 $P(X\geq 0)=1$，则有

$$E[X]=\int_0^{\infty}P(X>x)dx=\int_0^{\infty}\overline{F}(x)dx,$$

$$E[X^{\alpha}]=\int_0^{\infty}\alpha x^{\alpha-1}\overline{F}(x)dx,\ \alpha>0.$$

定理 2.10

如果 $E[|g(X)|]<\infty$，$P(A)>0$，则

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x),\ E[g(X)|A]=\frac{g(X)I[A]}{P(A)}.$$

其中 $I[A]$ 是事件 A 的**示性函数**，也可用 I_A 表示，即

$$I_A=I[A]=\begin{cases}1, & \text{当 } A \text{ 发生,}\\ 0, & \text{当 } A \text{ 不发生.}\end{cases}$$

若 X 具有密度函数 $f(x)$，则

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx.$$

定理 2.11

对于随机事件 B，有全概率公式 $P(B)=\int_{-\infty}^{\infty}P(B|X=x)dF(x)$.

定理 2.12

若随机变量 Y 的数学期望 $E[Y]$ 存在，则有全概率公式

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}E[Y|X=x]dF(x).$$

对于有联合分布 $F(\boldsymbol{x})$ 的随机向量 $\boldsymbol{x}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，有全概率公式

$$E[Y]=\int_{\mathbb{R}^n}E[Y|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

特别当 $\boldsymbol{X}$ 有联合密度 $f(\boldsymbol{x})$ 时，有

$$E[Y]=\int_{\mathbb{R}^n}E[Y|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]f(\boldsymbol{x})dx_1dx_2\cdots dx_n.$$

定理 2.13

对于随机变量 T，已知 $T=t$ 的条件下，$P_t(A)=P(A|T=t)$ 是概率. 对于任何事件 A,B，有

$$P_t(B|A)=P(B|A,T=t).$$

概率 $P_t(A)$ 只是表示已知 $T=t$ 的条件下事件 A 的发生概率, 在我们遇到的情况下都有明确的意义. 所以无论 $P(T=t)=0$ 与否, 我们都视 $P_t(\cdot)$ 为概率.

定理 2.14

当 Y 的数学期望 $E[Y]$ 存在时，用 $E[Y|T=t]$ 表示已知 $T=t$ 时 Y 的条件数学期望，则对于任意 $\boldsymbol{n}$ 维向量 $\boldsymbol{X}$ 及其在条件 $T=t$ 下的分布函数 $F_t(\boldsymbol{x})$，有

$$E[Y|T=t]=\int_{\mathbb{R}^n}E[Y|T=t,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]dF_t(\boldsymbol{x}).$$

证明. 我们有

$$\begin{aligned}E[Y|T=t]&=\int_0^{\infty}P_t(Y>y)dy\\&=\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}P_t(Y>y|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})dF_t(\boldsymbol{x})dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}(\int_0^{\infty}(Y>y|T=t,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})dy)dF_t(\boldsymbol{x})\\&=\int_{\mathbb{R}^n}E(Y|T=t,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})dF_t(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

从而得证. □

特别地, 若 X 是离散随机变量, 我们有:

定理 2.15

当 Y 的数学期望 $E[Y]$ 存在时, 用 $E[Y|T=t]$ 表示已知 $T=t$ 时 Y 的条件数学期望, 则对于任意离散型随机变量 X 及其概率分布 $p_j=P(X=x_j)$, $j=1,2,\cdots$, 有

$$E[Y=t|T=t]=\sum_{j=1}^{\infty}E[Y|T=t,X=x_j]P(X=x_j|T=t).$$

2.4 特征函数与概率极限定理

2.4.1 特征函数

如果 ξ,η 是随机变量，$i=\sqrt{-1}$，则称

$$Z=\xi+i\eta$$

是复复值随机变量. 如果 $E[\xi]$，$E[\eta]$ 存在，则定义 Z 的数学期望为

$$E[Z]=E[\xi]+iE[\eta].$$

对随机变量 X，因为 $\sin(tX)$，$\cos(tX)$ 的数学期望都存在，所以定义

$$\phi(t)=E[e^{itX}]=E[\cos(tX)]+iE[\sin(tX)],\ t\in\mathbb{R}.$$

上面定义的函数 $\phi(t)$ 称为 X 的**特征函数**. 可以证明随机变量的特征函数可以唯一决定该随机变量的分布函数. 所以，**随机变量的特征函数和分布函数相互唯一决定**.

例 2.16

用 $\phi(t)$ 表示 X 的特征函数，通过计算可以得到：

(1) 如果 $X\sim\mathcal{B}(n,p)$，那么
$$\phi(t)=(pe^{it}+q)^n;$$

(2) 如果 $X\sim\text{Geom}(n,p)$，那么
$$\phi(t)=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}};$$

(3) 如果 $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$，那么
$$\phi(t)=\exp\{\lambda(e^{it}-1)\};$$

(4) 如果 $X\sim U[a,b]$，那么
$$\phi(t)=\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)};$$

(5) 如果 $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$，则
$$\phi(t)=(1-it/\lambda)^{-1};$$

(6) 如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则
$$\phi(t)=\exp(i\mu t-\sigma^2t^2/2).$$

命题 2.17

用 $\phi(t)$ 表示 X 的特征函数，如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的随机变量，则 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 有特征函数

$$\phi_Y(t) = [\phi(t)]^n.$$

命题 2.18

如果 X_i 有特征函数 $\phi_i(t)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 有特征函数

$$\phi_Y(t) = \phi_1(t)\phi_2(t)\cdots\phi_n(t).$$

我们也可以定义随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的联合特征函数为

$$\phi(t_1, \cdots, t_n) = E\Big[\exp\{i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\}\Big]$$

可以证明联合特征函数唯一地确定联合分布.

2.5 概率不等式

定理 2.19: 马尔可夫不等式

对随机变量 X 和常数 $\epsilon > 0$，有

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^\alpha} E[|X|^\alpha],\ \alpha > 0.$$

推论 2.20: 切比雪夫不等式

对随机变量 X 和常数 $\epsilon > 0$，有

$$P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}(X).$$

定理 2.21: Cauchy-Schwarz 不等式

设 $E[X^2] < \infty$，$E[Y^2] < \infty$，则有

$$|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}.$$

并且上面不等式中的等号成立的充分必要条件是有不全为零的常数 a, b，使得 $aX + bY = 0$ a.s..

定理 2.22: Jensen 不等式

若 f 是凸函数，则只要期望存在，就有

$$E[f(X)] \geq f(E[X]).$$

2.5.1 概率极限定理

设 $\{X_n\}$ 是随机变量序列，X 是随机变量或常数. 如果

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1,$$

则称 X_n **几乎处处收敛**到 X 或**依概率 1 收敛**到 X，记做 $X_n \to X$ a.s.

设 $\{X_n\}$ 是随机变量序列，X 是随机变量或常数. 如果

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

则称随机变量序列 X_n **依概率收敛于** X，记为 $X_n \xrightarrow{P} X$.

对于分布函数列 $\{F_n(x)\}$ ，如果存在一个不减函数 $F(x)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

在 $F(x)$ 的每一个连续点上都成立，则称 $F_n(x)$ **弱收敛于** $F(x)$，并记为 $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$. 设随机变量 X_n，X 的分布函数分别为 $F_n(x)$ 及 $F(x)$，如果 $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$，则称 X_n **依分布收敛于** X，记为 $X_n \xrightarrow{d} X$.

定理 2.23: 强大数律

如果 $\{X_j\}$ 是独立同分布的随机变量序列，$\mu = EX_1$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \to \mu \ a.s.$$

定理 2.24: 中心极限定理

设随机变量序列 $\{X_j\}$ 独立同分布，有共同的数学期望 μ 和有限方差 σ^2，样本均值 $\overline{X}_n$ 和样本方差 $\hat{\sigma}^2$ 分别定义为

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2,$$

则

$$\xi_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},\ \eta_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

都依分布收敛到标准正态分布，即对任意 x，当 $x_n \to x$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n \leq x_n) = \Phi(x),\ \lim_{n\to\infty} P(\eta_n \leq x_n) = \Phi(x),$$

这里 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数.

定理 2.25: 单调收敛定理

设 $\{X_n\}$ 是随机变量序列，满足 $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$，$X$ 是随机变量，并且 $X_n \to X$ a.s.，则

$$EX_n \to EX.$$

对非负随机变量 $X_1, X_2, \cdots$，有

$$E[\sum_{j=1}^{\infty} X_j] = \sum_{j=1}^{\infty} E[X_j].$$

对于非负函数列 $\{h_j(s)\}$ 和分布函数 $F(x)$，有

$$\int_a^b \sum_{j=1}^{\infty} h_j(s)dF(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b h_j(s)dF(s).$$

定理 2.26: 有界收敛定理

设随机变量序列 $\{X_n\}$ 有界，$|X_n| \le M$ a.s.，$n \ge 1$. 如果 $X_n \to X$ a.s.，则

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$

又设函数列 $\{h_n(t)\}$ 有界：$|h_n(t)| \le M$. 如果对 $t \in (a,b)$，$h_n(t) \to h(t)$，则在有限区间 $[a,b]$ 上，由

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(s)ds = \int_a^b h(s)ds.$$

定理 2.27: 勒贝格控制收敛定理

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列随机变量，且 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$. 若存在随机变量 Y，使得 Y 的期望存在且对任意 $n \ge 1$，$|X_n| \le Y$，则有

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X].$$

命题 2.28

设随机变量 $X \ge 0$ a.s., $\mu = E[X]$，定义随机变量

$$\tilde{X}_m = \begin{cases} X, & \text{当 } X \le m \text{ 时}, \\ m, & \text{当 } X > m \text{ 时}, \end{cases}$$

则当 $m \to \infty$ 时，$E[\tilde{X}_m] \to \mu$.

证明. 当 $m \to \infty$ 时，X_m 单调上升趋于 X，于是 $E[\tilde{X}_m] \to \mu$. □

2.6 次序统计量

定义 2.29

对于随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其 **次序统计量**为随机变量 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$，其中 $X_{(1)} = \min(X_1, \cdots, X_n)$，$X_{(2)}$ 是 $X_1, \cdots, X_n$ 中第二小的，$\cdots$，$X_{(n-1)}$ 是 $X_1, \cdots, X_n$ 中第二大的，$X_{(n)} = \max(X_1, \cdots, X_n)$. 注意到由定义 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$. 我们称 $X_{(j)}$ 为 j 阶统计量. 如果 n 是奇数，则称 $X_{(n+1)/2}$ 是 $X_1, \cdots, X_n$ 的样本中位数.

定理 2.30

设 X 有密度函数 $h(x)$，而 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自于总体 X 的样本，那么次序统计量 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ 有联合密度

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} n! \prod_{j=1}^{n} h(x_j), & \text{当 } x_1 < x_2 < \cdots < x_n \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

特别地, 当 X 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布时, 次序统计量 $(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)})$ 有联合密度

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{n!}{a^n}, & \text{当 } 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < a \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

命题 2.31

设 U 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布, $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 是来自于总体 U 的样本, $(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)})$ 为其次序统计量. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个轮换对称的函数, 那么有

$$Ef(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)}) = Ef(U_1, U_2, \cdots, U_n).$$

证明. 独立同分布均匀随机变量序列 $U_1, \ldots, U_n$ 在超立方体 $D = (0, a)^n$ 上的联合密度函数为:

$$h(u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{t^n}.$$

那么, 右侧的期望可以写为:

$$E[f(U_1, \ldots, U_n)] = \int_D f(u_1, \ldots, u_n) \frac{1}{t^n} \, du_1 \ldots du_n.$$

令 S_n 为 n 个元素的全排列群（对称群）. 对于任意排列 $\pi \in S_n$，定义区域:

$$D_\pi = \{(u_1, \ldots, u_n) \in D : u_{\pi(1)} < u_{\pi(2)} < \cdots < u_{\pi(n)}\}.$$

在除去一个零概率的集合（即坐标相等的边界 $u_i = u_j$）的意义下, 超立方体 D 可以被划分为 $n!$ 个互不重叠的 D_π 的并集, 因此积分可以分解为:

$$E[f(U_1, \ldots, U_n)] = \sum_{\pi \in S_n} \int_{D_\pi} f(u_1, \ldots, u_n) \frac{1}{t^n} \, du_1 \ldots du_n.$$

对于求和式中的任意一个积分项 $\int_{D_\pi}$, 我们作变量代换: 令 $v_i = u_{\pi(i)}$, 得到了区域 D_π 到标准的 n 维单纯形 $\Delta = \{0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_n < t\}$ 的一个双射. 这个变换本质上是一个置换矩阵的线性变换, 其雅可比行列式的绝对值 $|J| = 1$. 被积函数: $f(u_1, \ldots, u_n)$ 变为了 $f(v_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, v_{\pi^{-1}(n)})$. 此时, 应用函数 f 的对称性, 变量的具体排列顺序不影响函数值:

$$f(v_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, v_{\pi^{-1}(n)}) = f(v_1, \ldots, v_n).$$

于是, 对于每一个 $\pi \in S_n$, 其积分都等于:

$$\int_\Delta f(v_1, \ldots, v_n) \frac{1}{t^n} \, dv_1 \ldots dv_n.$$

因为共有 $n!$ 个这样的积分区域, 我们将它们加总:

$$E[f(U_1, \ldots, U_n)] = n! \int_\Delta f(v_1, \ldots, v_n) \frac{1}{t^n} \, dv_1 \ldots dv_n.$$

而 $n! \frac{1}{t^n}$ 是 $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})$ 在 Δ 上的联合密度函数. 因此, 上式右边为 $E[f(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})]$. $\square$

2.7 习题

习题 2.1

设 $P(0 \leq X \leq c) = 1$. 证明: $\operatorname{Var}(X) \leq c^2/4$.

习题 2.2

设 X 是一个随机变量, 证明

$$P(X - E(X) > t) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{t^2 + \operatorname{var}(X)},\ t > 0.$$

习题 2.3

证明

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

习题 2.4

给定由顶点 $0, 1, \cdots, r$ 以及 r 条边构成的随机图, 这 r 条边为 (i, Y_i). $i = 1, \cdots, r$, 其中

$$Y_i = \begin{cases} j & \text{概率}\, \dfrac{1}{r+k},\ j = 1, \cdots, r, \\ 0 & \text{概率}\, \dfrac{k}{r+k}, \end{cases}$$

求这个图是连通图的概率.

习题 2.5

设 $X_1, \cdots, X_n$ 为独立同分布的随机变量，均服从参数 λ 的指数分布. 设

$$Y_i = X_1 + \cdots + X_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

(i) 求 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的联合密度函数.

(ii) 求 Y_n 的概率密度.

(iii) 求在 $Y_n = t$ 的条件下 $Y_1, \cdots, Y_{n-1}$ 的条件概率密度.

第 3 讲　随机过程基本概念

3.1　随机过程定义

定义 3.1

假设 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 是概率空间, T 是指标集, $\mathcal{E}$ 为点集. 称一族随机变量 $X(\omega, t) : \Omega \mapsto \mathcal{E}, t \in T$ 为**随机过程**, 记作 $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$, 其中称 T 为**时间参数空间**, $\mathcal{E}$ 为**状态空间**. $\{X(t) = a\}$ 表示随机过程在 t 时刻处于状态 a. 有时将时间 t 作为下标, 如 $X_t(\omega)$; 有时为简洁起见, 略去 ω, 仅写作 $X(t)$ 或 X_t.

参数 $t \in T$ 一般表示时间. 通常 T 为 $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ 或区间 $[a, b]$ (其中 a 可以取 $-\infty$, b 可以取 $-\infty$). 当 T 取可数集时，通常称 $\{X(t) : t \in T\}$ 是一个随机序列.

注记 3.2

有时，从另一个角度来看随机过程是很有益的，即随机过程 $\{X(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ 可以看成是定义在 $T \times \Omega$ 上的二元函数. 对于固定的样本点 $\omega \in \Omega$, $X(t, \omega)$ 就是定义在 T 上的一个函数，称为一条**样本路径**或**轨道**. 而对于固定的时刻 $t \in T$, $X(t) = X(t, \omega)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个随机变量.

例 3.3: 余弦波过程

令 Θ 是 $[0, 2\pi]$ 上的均匀随机变量, a, ω 为给定的正常数. 定义

$$X(t) = a\cos(\omega t + \Theta), \ -\infty < t < \infty.$$

那么 $\boldsymbol{X} = (X(t), -\infty < t < \infty)$ 为随机过程, 其中 $I = (-\infty, \infty)$, $\mathcal{E} = [-a, a]$. 任给一个相位 Θ, $X(t)$ 为一条余弦波曲线, 振幅为 a, 频率为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

例 3.4: 简单随机游动

假设 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为一列独立同分布随机变量,

$$P(\xi_n = 1) = p, \ P(\xi_n = -1) = 1 - p,$$

其中 $0 < p < 1$. 定义

$$S_0 = 0, S_n = S_{n-1} + \xi_n, \ n \geq 1,$$

那么 $S = (S_n, n \geq 0)$ 为随机过程, 时间参数空间 $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 状态空间 $\mathcal{E} = \mathbb{Z}$. 该过程用于描述直线上随机游动: 从原点出发, 一步一格, 向右走的概率为 p, 向左走的概率为 $1 - p$, S_n 表示第 n 步以后所处的位置.

定义 3.5

随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 称为相互独立的，如果对任意 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 以及 $s_1, \cdots, s_m$，$\mathbf{X} = (X(t_1), \cdots, X(t_n))$ 和 $\mathbf{Y} = (Y(s_1), \cdots, Y(s_m))$ 是独立的.

3.2 随机过程概率分布

在概率论中, 我们知道对于一个随机变量, 可以用它的分布函数来刻画它的概率分布. 那么, 对于一个随机过程, 如何来刻画它的概率分布呢? 以下以 $\mathcal{E}=\mathbb{R}$ 和 $T=(-\infty,+\infty)$ 为例来描述随机过程的概率分布.

任给 $t\in T$, $X(t)$ 的分布函数为

$$F_t(x)=P(X(t)\le x),$$

称为 $\mathbf{X}$ 的 **1-维分布**. 任给 $s,t\in T$, $(X(s),X(t))$ 的联合分布函数为

$$F_{s,t}(x)=P(X(s)\le x,X(t)\le y),$$

称为 $\mathbf{X}$ 的 **2-维分布**. 任给 $t_1,t_2,\cdots,t_k\in T$, $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_k))$ 的联合分布函数为

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_k)\le x_k),$$

称为 $\mathbf{X}$ 的 **k-维分布**.

随机过程 $\boldsymbol{X}$ 的概率分布可以通过它的所有有限维分布函数族来描述. 假设 $\mathbf{X}=(X(t),t\in T)$ 和 $\mathbf{Y}=(Y(t),t\in T)$ 为两个随机过程, 如果对任意 $t\ge 1$ 和 $t_1,t_2,\cdots,t_k\in T$ 均有

$$F^{\mathbf{X}}_{t_1,t_2\cdots,t_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)\equiv F^{\mathbf{Y}}_{t_1,t_2\cdots,t_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k),\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,k.$$

那么称 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 具有相同的概率分布.

不难看出，一个随机过程的概率分布具有如下两个性质：

(1) **对称性**：对 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$，有

$$\begin{aligned}&F_{t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}}(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n})\\=&P(X(t_{j_1})\le x_{j_1},X(t_{j_2})\le x_{j_2},\cdots,X(t_{j_n})\le x_{j_n})\\=&P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n)\\=&F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

(2) **相容性**：对于 $m<n$，有

$$\begin{aligned}&F_{t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)\\=&F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m).\end{aligned}$$

定理 3.6

设分布函数族 $\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\}$ 满足上述的对称性和相容性，则必存在一个随机过程 $\{X(t),\ t\in T\}$，使

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n):t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\}$$

恰好是 $\{X(t),\ t\in T\}$ 的概率分布.

Kolmogorov 存在定理说明，随机过程的有限维分布族是随机过程概率特征的完整描述.

3.3 随机过程的数字特征

定义 3.7: 均值函数

假设对于每一个 $t \in T$, $E|X(t)| < \infty$, 称

$$\mu_X(t) = EX(t),\ \ t \in T$$

是 X 的**均值函数**.

定义 3.8: 自协方差函数

假设对每一个 $t \in T$, $E[X(t)^2] < \infty$, 称

$$\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}(X(t)),\ \ t \in T$$

为 X 的**方差函数**. 定义

$$r_X(s,t) = E[X(s)X(t)],\ \ s,t \in T,$$

称 $r_X(s,t)$ 为 X 的**自相关函数**. 定义**自协方差函数**为

$$\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) = r_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t),\ \ s,t \in T.$$

定义 3.9

假设 $\mathbf{X} = (X(t), t \in T)$ 和 $\mathbf{Y} = (Y(t), t \in T)$ 是两个随机过程, 并且对每一个 $t \in T$, $E[X(t)^2] < \infty$, $E[Y(t)^2] < \infty$. 定义

$$r_{X,Y}(s,t) = E(X(s)Y(t)),\ \ s,t \in T,$$

称 $r_{X,Y}(s,t)$ 为 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的**互相关函数**.

例 3.10

对于余弦波过程, 我们来计算一下它的均值函数, 方差函数以及自相关函数. 我们有

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] \\ &= aE\cos(\omega t + \Theta) \\ &= a\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(\omega t + \theta)d\theta = 0,\ \ t \in T;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] \\ &= a^2 E[\cos(\omega s + \Theta)\cos(\omega t + \Theta)] \\ &= \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega s + \theta)\cos(\omega t + \theta)d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s),\ \ s,t \in T.\end{aligned}$$

因此, 方差函数为

$$\sigma_X^2(t) = \frac{a^2}{2},\ \ t \in T.$$

例 3.11

对于简单随机游动, 对于 $p = 1/2$ 的情形, 经过一些简单的计算, 我们可以得到

$$\mu_S(n) = ES_n = 0,\ n \geq 0$$

以及

$$r_s(n,m) = E[S_n S_m] = E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\xi_i\xi_j] = n \wedge m,\ n,m \geq 0,$$

其中 $n \wedge m$ 表示 n 和 m 中的最小值.

3.4 特殊过程

定义 3.12

令 $\boldsymbol{X} = (X(t), t \in T)$ 是一个随机过程, 对每一个 $t \in T$, $E[(X(t))^2] < \infty$, 如果

(1) 均值函数为常数, 即存在一个常数 μ 使得

$$\mu_X(t) \equiv \mu,\ t \in T;$$

(2) 自相关函数 $r_X(s,t)$ (等价地, 自协方差系数 $\mathrm{Cov}(X(s), X(t))$) 仅与时间差 $s-t$ 有关, 即存在一个函数 $\tau_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得

$$r_X(s,t) = \tau_X(s-t),\ s,t \in T,$$

那么称 $\boldsymbol{X}$ 为**弱平稳过程**, 有时也称为 **宽平稳过程**. 宽平稳的随机序列也称为**宽平稳序列**.

例 3.13

余弦波过程是弱平稳过程. 而简单随机游动不是弱平稳过程.

例 3.14

设 $\{\epsilon_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为一列两两互不相关的随机变量序列，满足 $E[X_n] = 0$ $(n = 0, 1, \cdots)$，且

$$E[X_m X_n] = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \sigma^2, & m = n. \end{cases}$$

则 $\{X_n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ 为宽平稳序列, 因为自协方差函数 $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = E[X_n X_m]$ 只与 $m-n$ 有关.

例 3.15: 滑动平均序列

设 $\{\epsilon_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为一列两两互不相关的具有相同均值 μ 和相同方差 σ^2 的随机变量序列, $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为任意 k 个实数. 考虑如下定义的序列:

$$X_n = a_1\epsilon_n + a_2\epsilon_{n-1} + \cdots + a_k\epsilon_{n-k+1},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

容易看出

$$E[X_n] = \mu(a_1 + a_2 + \cdots + a_k).$$

令 $\xi_j = \epsilon_j - \mu$，则由于 $\{\epsilon_j\}$ 两两不相关，我们知自协方差函数

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+\tau}) \\
=&E[(X_n - \mu(a_1 + a_2 + \cdots + a_k))(X_{n+\tau} - \mu(a_1 + a_2 + \cdots + a_k))] \\
=&E[(a_1\xi_n + a_2\xi_{n-1} + \cdots + a_k\xi_{n-k+1}) \\
&\quad (a_1\xi_{n+\tau} + a_2\xi_{n+\tau-1} + \cdots + a_k\xi_{n+\tau-k+1})] \\
=&\begin{cases} \sigma^2(a_k a_{k-\tau} + a_{k-1}a_{k-\tau-1} + \cdots + a_{\tau+1}a_1), & 0 \le \tau \le k-1 \\ 0, & \tau \ge k \end{cases}
\end{aligned}$$

于是协方差函数仅与时间间隔 τ 有关，所以我们有 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为宽平稳序列.

定义 3.16

令 $\boldsymbol{X} = (X(t).t \in T)$ 是一个随机过程. 如果对任意 $k \ge 1$, $t_1, t_2, \cdots, t_k \in T$ 以及 $t \in T$ 都有

$$(X(t_1 + t), X(t_2 + t), \cdots, X(t_k + t)) =_d (X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_k)),$$

那么称 $\boldsymbol{X}$ 为**强平稳过程**或**严平稳过程**.

定义 3.17

令 $\boldsymbol{X} = (X(t), t \in T)$ 是一个随机过程. 对任意 $s < t$, 称 $X(t) - X(s)$ 为**过程增量**. 如果 $X(t) - X(s)$ 的分布仅依赖于时间差 $t - s$, 而与 s 和 t 无关, 那么称 $\boldsymbol{X}$ 是**平稳增量过程**.

定义 3.18

如果对任意 $k \ge 1$ 和 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, 增量

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_k) - X(t_{k-1})$$

是相互独立的, 那么称 $\boldsymbol{X}$ 是**独立增量过程**.

例 3.19

简单随机游动是独立平稳增量过程.

定理 3.20

设 $\{X(t), t \ge 0\}$ 是一个独立增量过程，满足 $X(0) = 0$. 则 $X(t)$ 具有平稳增量的充分必要条件是：其特征函数具有可乘性，即 $\phi_{X(t+s)}(a) = \phi_{X(t)}(a)\phi_{X(s)}(a)$.

证明. 因为 $X(t)$ 具有平稳增量，所以 $X(t+s) - X(t)$ 与 $X(s) = X(s) - X(0)$ 具有相同的分布. 从而由

独立增量性我们有

$$\begin{aligned}\phi_{X(t+s)}(a) &= \phi_{X(t)}(a)\phi_{X(t+s)-X(t)}(a)\\ &= \phi_{X(t)}(a)\phi_{X(s)}(a).\end{aligned}$$

必要性得证.

下证充分性，由独立增量性我们有

$$\begin{aligned}\phi_{X(t)}(a)\phi_{X(s)}(a) &= \phi_{X(t+s)}(a)\\ &= \phi_{X(t)}(a)\phi_{X(t+s)-X(t)}(a),\end{aligned}$$

所以 $\phi_{X(t)}(a) = \phi_{X(t+s)-X(t)}(a)$. 于是 $X(t+s) - X(t)$ 与 $X(s) = X(s) - X(0)$ 具有相同的分布，即 $\{X(t)\}$ 具有平稳增量. □

定义 3.21

令 $\boldsymbol{X} = (X(t), t \in T)$ 是零均值随机过程, 如果对任意 $s \neq t$ 都有 $r_X(s,t) = 0$, 那么称 $\boldsymbol{X}$ 为 **白噪声**.

3.5 指数分布

3.5.1 指数分布

定义 3.22

称连续型随机变量 X 服从参数 (或均值) $\lambda > 0$ 的指数分布，如果它的概率密度函数为

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

我们记 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

我们来计算一下 X 的期望和方差. 我们有

$$\begin{aligned}E[X^n] &= \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx\\ &= 0 + \frac{n}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x} n x^{n-1} dx\\ &= 0 + \frac{n}{\lambda}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x^{n-1} dx\\ &= \frac{n}{\lambda}E[X^{n-1}].\end{aligned}$$

取 $n = 1$ 和 $n = 2$ 我们有

$$\begin{aligned}E[X] &= \frac{1}{\lambda},\\ E[X^2] &= \frac{2}{\lambda}E[X] = \frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.5.2 指数分布的性质

定义 3.23

我们称一个连续型随机变量的分布具有 **无记忆性**，如果对任意 $s,t\geq 0$，

$$P(X\geq s+t|X\geq s)=P(X\geq t).$$

命题 3.24

当 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，$X_i\sim\mathcal{E}(\lambda_i)$ 时，有

$$P(X_1\leq X_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},$$
$$\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\sim\mathcal{E}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n).$$

利用条件概率的定义，我们来验证指数分布具有无记忆性. 设 $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$. 则

$$P(X\geq s+t|X\geq s)=\frac{P(X\geq s+t)}{P(X\geq s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(X\geq t).$$

定理 3.25

如果取正值的连续型随机变量 X 具有无记忆性，则 X 具有指数分布.

证明. 设 X 是一个取正值的连续型随机变量，具有无记忆性. 设 F 是 X 的累积分布函数，记 $G(x)=1-F(x)$. 我们要证明：存在 $\lambda>0$ 使得 $G(x)=e^{-\lambda x}$. 注意到由无记忆性，我们有对任意 $s,t\geq 0$，

$$G(s+t)=G(s)G(t).$$

由 G 的连续性，我们知存在 $a\geq 0$ 使得 $G(x)=a^x$. 由 F 是一个分布函数知 $0<a<1$，从而存在 $\lambda>0$，使得

$$G(x)=e^{-\lambda x},$$

从而 X 服从指数分布. □

定理 3.26

令 $X_1,X_2.\cdots$ 是独立的参数为 λ 的指数随机变量，那么和 $S_n=X_1+\cdots+X_n$ 服从 $\Gamma(n,\lambda)$ 分布，也就是说，S_n 有密度函数

$$g_n(s)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}s^{n-1}e^{-\lambda s}=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\lambda s},\quad s\geq 0.$$

证明. 对 n 应用归纳法证明. 当 $n=1$ 时，S_1 服从参数为 λ 的指数分布，其密度函数即为 $g_1(s)$. 假定公式在 n 时成立，注意到 $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$ 且 S_n 与 X_{n+1} 独立. 所以我们有 S_{n+1} 的概率密度函数为

$$\begin{aligned}
f_{S_{n+1}}(s)&=\int_0^s f_{S_n}(t)f_{X_{n+1}}(s-t)dt\\
&=\int_0^s \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\lambda e^{-\lambda(s-t)}dt\\
&=e^{-\lambda s}\lambda^n\int_0^s\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt=\lambda e^{-\lambda s}\frac{\lambda^n s^n}{n!},
\end{aligned}$$

即为 $g_{n+1}(s)$. □

命题 3.27

设随机变量 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 相互独立，$T_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$. 我们有

$$P(T_i = \min(T_1, \cdots, T_n)) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

证明. 令 $S = T_i$，$U := \min\{T_j | j \neq i\}$. 我们知 $U \sim \mathcal{E}((\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) - \lambda_i)$. 因此我们有

$$\begin{aligned}
P(T_i = \min(T_1, \cdots, T_n)) &= P(S < U) \\
&= \int_0^\infty f_S(s) P(U > s) ds \\
&= \int_0^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i s} e^{-((\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) - \lambda_i)s} ds \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.
\end{aligned}$$

从而得证. □

命题 3.28

设随机变量 $T_1, T_2, \cdots$ 相互独立，$T_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$. 用 I 表示最小的随机变量 T_i 的 (随机) 下标. 则 I 和 $V = \min\{T_1, \cdots, T_n\}$ 是相互独立的.

证明. 首先，我们有

$$P(V \leq v) = 1 - e^{-\lambda v}, \ \lambda := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

记 $\lambda' = \lambda - \lambda_i$，$U := \min\{T_j | j \neq i\}$. 注意到 U 与 T_i 独立，且 $U \sim \mathcal{E}(\lambda')$. 注意到

$$\begin{aligned}
P(V \leq v, I = i) &= P(T_i \leq v, U \geq T_i) \\
&= \int_0^v P(U \geq t_i | T_i = t_i) \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} dt_i \\
&= \int_0^v P(U \geq t_i) \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} dt_i \\
&= \int_0^v e^{-\lambda' t_i} \lambda_i e^{-\lambda_i t_i} dt_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}(1 - e^{-\lambda v}).
\end{aligned}$$

于是 $P(V \leq v | I = i) = 1 - e^{-\lambda v} = P(V \leq v)$，从而 V 和 I 相互独立. □

3.5.3 一些结论和例子

命题 3.29

设随机过程 $T_1, T_2, \cdots$ 相互独立，$T_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$. 定义 $W = \sum_{k=1}^\infty T_k$，$M = \min_k\{T_k\}$，$\lambda_0 = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k$，则

(1) $P(W = \infty) = 1$ 的充分必要条件是 $\sum_{k=1}^\infty E[T_k] = \infty$；

(2) $P(W = \infty)$ 只能取值 1 或 0；

(3) $\lambda_0 < \infty$ 时，$M \sim \mathcal{E}(\lambda_0)$；

(4) $\lambda_0 = \infty$ 时，$M = 0$ a.s..

证明. 如果 $P(W=\infty)>0$，利用单调收敛定理我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}E[T_k]&=E[\sum_{k=1}^{\infty}T_k]=E[W]\\&=\int_0^{\infty}P(W>s)ds\geq\int_0^{\infty}P(W=\infty)ds=\infty.\end{aligned}$$

下设 $\sum_{k=1}^{\infty}E[T_k]=\infty$. 我们有

$$\begin{aligned}E[\exp(-W)]&=E[\exp(-\sum_{k=1}^{\infty}T_k)]=\prod_{k=1}^{\infty}E[\exp(-T_k)]\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\lambda_k e^{-\lambda_k s-s}ds=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+1/\lambda_k}=[\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{\lambda_k})]^{-1}.\end{aligned}$$

注意到 $E[T_k]=1/\lambda_k$，我们有

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{\lambda_k})\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\sum_{k=1}^{\infty}E[T_k]=\infty,$$

所以 $E[\exp(-W)]=0$. 于是 $\exp(-W)=0$ a.s.，即 $W=\infty$ a.s.. 所以我们证明了 (1). 注意到上述推导也说明了只要 $P(W=\infty)>0$，就有 $\sum_{k=1}^{\infty}E[T_k]=\infty$，从而 $P(W=\infty)=1$. 这就证明了 (2).

下面为我们来证明 (3) 和 (4). 利用概率的连续性，得到

$$\begin{aligned}P(M\geq t)&=P(\bigcap_{k=1}^{\infty}\{T_k\geq t\})=\lim_{n\to\infty}P(\bigcap_{k=1}^{n}\{T_k\geq t\})\\&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}P(T_k\geq t)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}e^{-\lambda_k t}=e^{-\lambda_0 t}.\end{aligned}$$

由此可知 M 服从参数为 λ_0 的指数分布. 当 $\lambda_0=\infty$ 时，我们知对任意 $t>0$，$P(M\geq t)=e^{-\infty}=0$，所以 $P(M=0)=1$. □

3.6 习题

习题 3.1

设随机过程 $X(t)=X+Yt+Zt^2$，其中 X，Y 和 Z 是相互独立的随机变量，且具有均值 0 和方差 1，求随机过程 $X(t)$ 的自协方差函数.

习题 3.2

设随机过程 $Z(t)=X\sin t+Y\cos t$, 其中 X 和 Y 是相互独立的二元随机变量, 他们都分别以 2/3 和 1/3 的概率取值 -1 和 -2.

1. 求 $Z(t)$ 的均值函数和自相关函数;
2. $Z(t)$ 是否为宽平稳过程, 是否为严平稳过程?

习题 3.3

如果 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是独立同分布的随机变量，定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$，证明 $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 是平稳独立增量过程.

习题 3.4

令 T 服从参数为 λ 的指数分布. 计算 $E[T|T < c]$.

习题 3.5

某宠物商店每个月初订购一次猫粮 (单位：千克)，以满足该月的销售需求. 假设每月的需求服从参数为 λ 的指数分布. 如果商店猫粮的进价为 c 元每千克，售价为 $s(s > c)$ 元每千克. 假定月底剩下的存货因为过期毫无价值，而且商店不会因为进货量不足而受到额外损失. 那么该商店因订购多少猫粮使得期望利润最大？如果存货能以每千克 $r(r < \min(s, c))$ 元的价格退回，那么最佳订购量又是多少？

第 4 讲　泊松过程

4.1　泊松分布

定义 4.1

我们称一个随机变量 X 服从参数 λ 的 **泊松分布**，如果 X 的分布列为

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

我们记 $X\sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.

定理 4.2

如果 $X\sim \mathrm{Bin}(n,p_n)$，满足当 $n\to\infty$ 时，有 $np_n\to\lambda$. 那么

$$P(X=k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

证明. 记 $\lambda_n=np_n$，则

$$\begin{aligned}P(n=k)&=\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}\\&=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{\lambda_n}{n})^k(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k}\\&=\frac{\lambda_n^k}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k}.\end{aligned}$$

由于对固定的 k 有 $\lim_{n\to\infty}\lambda_n^k=\lambda^k$，$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k}=e^{-\lambda}$ 以及

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})=1,$$

从而我们有

$$P(X=k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$ □

4.2　计数过程

我们用 $N(t)$ 表示时间段 $[0,t]$ 内某类事件发生的个数，则对每个固定的 t, $N(t)$ 是随机变量. $\{N(t):t\geq 0\}$ 构成了一个随机过程，我们称之为**计数过程**. 我们后面将其简记为 $\{N(t)\}$.

计数过程满足如下的条件：

(1) 对 $t\geq 0$，$N(t)$ 是取非负整数值的随机变量；

(2) 对于 $t>s\geq 0$，$N(t)\geq N(s)$；

(3) 对于 $t>s\geq 0$，$N(t)-N(s)$ 是时间段 $(s,t]$ 中的事件发生数；

(4) $\{N(t)\}$ 的轨迹是单调不减右连续 (即对任意 $t\geq 0$，$\lim_{s\searrow t}N(s)=N(t)$) 的阶梯函数.

(5) $\{N(t)\}$ 的轨迹具有左极限，即对任意 $t>0$，$\lim_{s\nearrow t}N(s)$ 存在.

对于计数过程 $\{N(t)\}$，用 $N(s,t]$ 表示区间 $(s,t]$ 内发生的事件数，则有

$$N(s,t] = N(t) - N(s),\ s < t.$$

如果在互不相交的时间段内发生时间的个数是相互独立的，严格地说是指对任何正整数 n 以及

$$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

随机变量

$$N(0), N(0,t_1], N(t_1,t_2], \cdots, N(t_{n-1},t_n]$$

相互独立，那么相应的计数过程 $\{N(t)\}$ 具有独立增量性.

如果在长度相等的时间段内，事件发生个数的概率分布是相同的，即指对任意 $s > 0$，$t_2 > t_1 \ge 0$，随机变量 $N(t_1,t_2]$ 与 $N(t_1+s,t_2+s]$ 同分布，则计数过程具有平稳增量过程.

命题 4.3

设 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 是两个随机过程. 如果对于任何 $n \ge 1$ 和 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 随机向量

$$(N_1(t_1), N_1(t_2), \cdots, N_1(t_n)) \text{ 和 } (N_2(t_1), N_2(T_2), \cdots, N_2(t_n))$$

独立, 则这两个计数过程互相独立.

4.3 泊松过程

定义 4.4

称满足下面条件的计数过程 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的**泊松过程**:

(1) $N(0) = 0$;

(2) $\{N(t)\}$ 是独立增量过程;

(3) 对于任意 $t, s \ge 0$，$N(s,t+s]$ 服从参数为 λt 的泊松分布，即

$$P(N(s,t+s] = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0, 1, \cdots, \tag{4.1}$$

其中的正常数 λ 称为泊松过程 $\{N(t)\}$ 的 **强度**或**速率**.

上述定义中的 (3) 说明泊松过程是平稳增量过程，而且时间段 $(s,s+t]$ 中发生的事件个数服从泊松分布.

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，容易计算

$$E[N(t)] = \lambda t,\ \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

于是

$$\lambda = \frac{EN(t)}{t}$$

是单位时间内事件发生的平均数. λ 越大，单位时间平均发生的事件越多. 这正是称 λ 为泊松过程的强度的原因.

定义 4.5

我们称函数 f 当 $h \to 0$ 时是 $o(h)$ 的，如果

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0.$$

命题 4.6

(1) 若 f, g 均满足当 $h \to 0$ 时是 $o(h)$ 的, 那么 $f+g$ 当 $h \to 0$ 时也是 $o(h)$ 的.

(2) 设 $c \in \mathbb{R}$, 若 f 当 $h \to 0$ 时是 $o(h)$ 的, 那么 $g=cf$ 当 $h \to 0$ 时也是 $o(h)$ 的.

定义 4.7

设 $\lambda > 0$ 是常数. 如果计数过程 $\{N(t)\}$ 满足以下条件，则称它是强度为 λ 的泊松过程：

(1) $N(0)=0$；

(2) $N(t)$ 是独立增量过程，有平稳增量性；

(3) 对任意 $t \geq 0$，当正数 $h \to 0$ 时有

$$\begin{cases} P(N(h)=1)=\lambda h+o(h), \\ P(N(h)\geq 2)=o(h). \end{cases}$$

注记 4.8

由上面定义中的 (3) 可以得出：

$$\begin{aligned} P(N(h)=0) &= 1-P(N(h)\geq 1) \\ &= 1-P(N(h)=1)-P(N(h)\geq 2) \\ &= 1-\lambda h+o(h). \end{aligned}$$

定理 4.9

定义 4.4 和定义 4.7 等价.

证明. 首先我们由定义 4.7 推导定义 4.4. 设 $\{N(t)\}$ 满足定义 4.7，只需证明 (4.1) 成立.

对确定的正数 t，将区间 $(0,t]$ 进行 n 等分，每段长为 t/n，等分点是

$$t_j=\frac{jt}{n},\ j=0,1,\cdots,n.$$

用 $Y_j=N(t_{j-1},t_j]$ 表示第 j 个区间 $(t_{j-1},t_j]$ 中的事件数，则 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 独立同分布，并且

$$P(Y_j\geq 2)=o(t_j-t_{j-1})=o(t/n),$$

$$p_n\equiv P(Y_j=1)=\lambda t/n+o(t/n),$$

$$q_n\equiv P(Y_j=0)=1-P(Y_j\geq 1)=1-\lambda t/n+o(t/n).$$

对非负整数 k，引入事件

$$A_n = \{\text{有 } k \text{ 个 } Y_j = 1,\ \text{其余的 } Y_j = 0;\ 1 \le j \le n\},$$

$$B_n = \{\sum_{j=1}^{n} Y_j = k,\ \text{至少有一个 } Y_j \ge 2\},$$

则有 $B_n \subset \bigcup_{j=1}^{n}\{Y_j \ge 2\}$, $A_n \cap B_n = \emptyset$. 当 $n \to \infty$ 时,

$$P(B_n) \le P(\bigcup_{j=1}^{n}\{Y_j \ge 2\}) \le nP(Y_j \ge 2) = no(t/n) \to 0.$$

$$np_n = n(\lambda t/n + o(t/n)) \to \lambda t,\ q_n \to 1,$$

$$\begin{aligned} q_n^n &= (1 - \lambda t/n + o(t/n))^n = (1 - \frac{\lambda t}{n} + o(t/n))^n \\ &= (1 - \frac{\lambda t}{n})^n (1 + \frac{o(t/n)}{1 - \lambda t/n})^n \to e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

所以利用 $\{N(0,t] = k\} = \{\sum_{j=1}^{n} Y_j = k\} = A_n \cup B_n$ 我们有

$$\begin{aligned} P(N(s, s+t] = k) &= P(N(0,t] = k) \\ &= P(A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty}[P(A_n) + P(B_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k q_n^{n-k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!}[n(n-1)\cdots(n-k+1)p_n^k] q_n^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

接下来我们由定义 4.4 推导定义 4.7. 应用 Taylor 公式我们有当 $h \to 0$ 时,

$$\begin{aligned} P(N(h) = 1) &= \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h(1 - \lambda h + o(h)) \\ &= \lambda h + o(h), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} P(N(h) \ge 2) &= 1 - P(N(h) = 0) - P(N(h) = 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} \\ &= 1 - [1 - \lambda h + o(h)] - [\lambda h + o(h)] \\ &= o(h). \end{aligned}$$

□

我们也可以利用建立微分方程的方法来由定义 4.7 推导定义 4.4. 记 $P_n(t) = P(N(t) = n)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$，$P(h) = P(N(h) \ge 1) = P_1(h) + P_2(h) + \cdots = 1 - P_0(h)$，则

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P(N(t+h) = 0) \\ &= P(N(t+h) - N(t) = 0, N(t) = 0) \\ &= P(N(t) = 0)P(N(t+h) - N(t) = 0) \\ &= P_0(t)P_0(h) \\ &= P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)). \end{aligned}$$

因此
$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}.$$
令 $h\to 0$，我们有 $P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$. 解此微分方程，我们有 $P_0(t)=Ke^{-\lambda t}$，其中 K 为常数. 由 $P_0(0)=P(N(0)=0)=1$ 我们有 $K=1$，所以
$$P_0(t)=e^{-\lambda t}.$$
类似地，当 $n\geq 1$ 时，有
$$\begin{aligned}P_n(t+h)&=P(N(t+h)=n)\\&=P(N(t)=n,N(t+h)-N(t)=0)\\&\quad+P(N(t)=n-1,N(t+h)-N(t)=1)\\&\quad+P(N(t+h)=n,N(t+h)-N(t)\geq 2)\\&=P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)P_1(h)+o(h)\\&=(1-\lambda h)P_n(t)+\lambda hP_{n-1}(t)+o(h),\end{aligned}$$
于是
$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{h}.$$
令 $h\to 0$，我们有
$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t).$$
于是 $e^{\lambda t}[P_n'(t)+\lambda P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$，即
$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t).$$

下面应用数学归纳法来证明 $P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$. 当 $n=1$ 时，$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_1(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_0(t)=\lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}=\lambda$，且有 $P_1(0)=0$，求解微分方程可得 $P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$. 进一步，假设 $P_{n-1}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ 成立，则有
$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)=\lambda e^{\lambda t}\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!},$$
并且 $P_n(0)=0$. 求解微分方程可得
$$P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

由条件 (2) 我们知该计数过程具有平稳独立增量，故对一切 $s\geq 0$ 以及 $t>0$，均有
$$P(N(t+s)-N(s)=n)=P(N(t)=n)=P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$
于是 (4.1) 成立.

4.4 泊松过程的数字特征

首先由泊松随机变量的数字特征可以看出, 对任意 $t>0$,
$$EN(t)=\lambda t,\quad \mathrm{Var}(N(t))=\lambda t,$$
$$E[N(t)(N(t)-1)\cdots(N(t)-k+1)]=(\lambda t)^k.$$
另外, 特征函数为
$$Ee^{ixN(t)}=e^{\lambda t(e^{ix}-1)}.$$

对任意 $s<t$, $N(s)$ 和 $N(t)$ 的自相关系数和自协方差函数可以如下计算:

$$
\begin{aligned}
E(N(s)N(t)) &= E[N(s)(N(s)+N(t)-N(s))]\\
&= E[N(s)^2]+E[N(s)(N(t)-N(s))]\\
&= E[N(s)^2]+E[N(s)]E[N(t)-N(s)] \quad (\text{独立增量性})\\
&= E[N(s)^2]+E[N(s)]E[N(t-s)] \quad (\text{平稳增量性})\\
&= (\lambda s)^2+\lambda s+\lambda^2 s(t-s)\\
&= \lambda^2 st+\lambda s.\\
\mathrm{Cov}(N(s),N(t)) &= E[N(s)N(t)]-E[N(s)]E[N(t)]=\lambda s.
\end{aligned}
$$

4.5 泊松过程的联合分布

下面我们计算泊松过程的联合分布. 任意给定 $0<t_1<t_2<\cdots<t_m$ 和 $0\le k_1\le k_2\le\cdots\le k_m$,

$$
\begin{aligned}
&P(N(t_1)=k_1,N(t_2),\cdots,N(t_m)=k_m)\\
=&P(N(t_1)=k_1,N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1,\cdots,N(t_m)-N(t_{m-1})=k_m-k_{m-1})\\
=&P(N(t_1)=k_1)P(N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1)\cdots P(N(t_m)-N(t_{m-1})=k_m-k_{m-1})\\
=&\frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}\cdots\frac{[\lambda(t_m-t_{m-1})]^{k_m-k_{m-1}}}{(k_m-k_{m-1})!}e^{-\lambda t_m}.
\end{aligned}
$$

有了联合分布，就可以计算条件分布. 假设 $s<t$, 在给定 $N(s)=k$ 的条件下,

$$
\begin{aligned}
P(N(t)=m|N(s)=k) &= \frac{P(N(s)=k,N(t)=m)}{P(N(s)=k)}\\
&= \frac{[\lambda(t-s)]^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda(t-s)},\ \forall m\ge k.
\end{aligned}
$$

类似地, 假设 $s<t$, 在给定 $N(t)=m$ 的条件下,

$$
\begin{aligned}
P(N(s)=k|N(t)=m) &= \frac{P(N(s)=k,N(t)=m)}{P(N(t)=m)}\\
&= \frac{m!}{k!(m-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{m-k},\ \forall k\le m.
\end{aligned}
$$

注记 4.10

上面两式是容易理解的. 对于前者, 可以解释如下: 在给定 $N(s)=k$ 的条件下, $N(t)=m$ 等价于 $N(s,t]=m-k$; 而泊松过程具有独立平稳增量性 (与统计个数的起点时刻无关), 因此 $N(s,t]=m-k$ 的概率依然服从泊松分布. 对于后者, 可以解释如下: 在给定 $N(t)=m$ 的条件下, $(0,t]$ 时间段内有 m 名顾客, 每位顾客独立并随时可以来寻求服务, 因此恰好在 $(0,s]$ 内到达的顾客数服从二项分布.

4.6 长时间极限行为

设 $(N_t:t\ge 0)$ 是以 $\alpha>0$ 为参数的 Poisson 过程.

定理 4.11

当 $t\to\infty$ 时几乎必然地有 $N_t/t\to\alpha$.

证明. 记 $\xi_k := N_k - N_{k-1}$，则 $\{\xi_k\}$ 是独立同分布随机变量序列且服从参数为 α 的 Poisson 分布. 注意 $N_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ 且 $\mathbf{E}(\xi_k) = \mathbf{Var}(\xi_k) = \alpha$. 由强大数定律，当 $n \to \infty$ 时几乎必然地有 $N_n/n \to \alpha$. 注意

$$\frac{\lfloor t \rfloor}{t} \frac{N_{\lfloor t \rfloor}}{\lfloor t \rfloor} \le \frac{N_t}{t} \le \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{t} \frac{N_{\lfloor t \rfloor + 1}}{\lfloor t \rfloor + 1}.$$

注意到

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{t} = 1.$$

所以当 $t \to \infty$ 时几乎必然地有 $N_t/t \to \alpha$. □

定理 4.12

对于任何 $x \in \mathbb{R}$，当 $t \to \infty$ 时有

$$\mathbf{P}(\frac{N_{\alpha t} - \alpha t}{\sqrt{\alpha t}} \le x) \to \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

证明. 令 $\xi_k := N_k - N_{k-1}$，对 $\{\xi_k\}$ 应用中心极限定理，当 $n \to \infty$ 时有

$$\mathbf{P}\Big(\frac{N_n - \alpha n}{\sqrt{\alpha n}} \le x\Big) \to \Phi(x).$$

注意

$$\frac{N_t - \alpha t}{\sqrt{\alpha t}} = \frac{N_t - N_{t-\lfloor t \rfloor} - \alpha \lfloor t \rfloor}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{N_{t-\lfloor t \rfloor} - \alpha(t - \lfloor t \rfloor)}{\sqrt{\alpha t}},$$

其中 $N_t - N_{t-\lfloor t \rfloor}$ 与 $N_{\lfloor t \rfloor}$ 同分布. 所以由我们知当 $t \to \infty$ 时有

$$\mathbf{P}(\frac{N_t - N_{t-\lfloor t \rfloor} - \alpha \lfloor t \rfloor}{\sqrt{\alpha \lfloor t \rfloor}} \le x) = \mathbf{P}(\frac{N_{\lfloor t \rfloor - \alpha \lfloor t \rfloor}}{\sqrt{\alpha \lfloor t \rfloor}} \le x) \to \Phi(x),$$

进而

$$\mathbf{P}(\frac{N_t - N_{t-\lfloor t \rfloor} - \alpha \lfloor t \rfloor}{\sqrt{\alpha \lfloor t \rfloor}} \le \varepsilon) \to \Phi(x).$$

再注意到当 $t \to \infty$ 时，

$$\Big|\frac{N_{t-\lfloor t \rfloor} - \alpha(t - \lfloor t \rfloor)}{\sqrt{\alpha t}}\Big| \le \frac{N_1 + \alpha}{\sqrt{\alpha t}} \to 0, \ a.s..$$

所以结论成立. □

推论 4.13

对于任意 $s, x > 0$, 当 $\lambda \to \infty$ 时有

$$e^{-\lambda s} \sum_{k \le \lambda x} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \to 1_{\{0<s<x\}} + \frac{1}{2} 1_{\{s=x\}}.$$

证明. 设 $(N_t : t \ge 0)$ 是以 1 为参数的泊松过程. 则欲证结果等价于, 当 $\lambda \to \infty$ 时, 有

$$P(N_{\lambda s} \le \lambda x) = P(\frac{N_{\lambda s} - \lambda s}{\sqrt{\lambda s}} \le \frac{\sqrt{\lambda}(x - s)}{\sqrt{s}}) \to 1_{\{0 \le s < x\}} + \frac{1}{2} 1_{\{s=x\}}.$$

由定理 4.12 知上式成立. □

4.7 习题

习题 4.1

设您口袋里有 N 枚硬币，其中 N 是一个随机数，服从参数为 λ 的泊松分布. 现在您抛掷这些硬币，设每一枚硬币正面朝上的概率为 p. 证明正面朝上的硬币数服从参数为 λp 的泊松分布.

习题 4.2

在某高速公路段上超速的汽车形成平均每小时 3 辆的泊松过程, 用 T 表示监测雷达记录到 n 辆超速汽车所用的时间. 计算 $P(T > t)$.

习题 4.3

一个二维 Poisson 过程是一个在平面上随机发生的事件的过程，它满足

(1) 对于面积为 A 的任何区域，在这个区域中的事件个数具有均值为 λA 的 Poisson 分布.

(2) 在不相交的区域中的事件个数是独立的.

对于这样的过程，考察平面中的一个任意的点，而以 X 记它到最近的事件的（欧式）距离. 证明：

(1) $P\{X > t\} = e^{-\lambda\pi t^2}$,

(2) $E[X] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$.

第 5 讲　泊松呼叫流

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程. 定义 $S_0=0$. 用 S_n 表示第 n 个事件发生的时刻，简称为第 n 个到达时或第 n 个呼叫时. 由于呼叫时 $S_1,S_2,\cdots$ 依次到达，所以又称 $\{S_j\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的**呼叫流**.

设 $\{S_j\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流. 我们不难看出 $\{N(t)\ge n\}$ 和 $\{S_n\le t\}$ 都表示 $[0,t]$ 内至少有 n 个呼叫，$\{N(t)=n\}$ 和 $\{S_n\le t<S_{n+1}\}$ 都表示 $[0,t]$ 内恰有 n 个呼叫. 于是

$$\begin{aligned}\{N(t)\ge n\}&=\{S_n\le t\}, \qquad (5.1)\\ \{N(t)=n\}&=\{S_n\le t<S_{n+1}\}.\end{aligned}$$

例 5.1

设 $\{S_j\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流. 对于 $s_1<s_2<\cdots$ 以及 $i=1,2,\cdots$，定义

$$A_i=\{N(s_{i-1},s_i]=0\},$$

$$B_i=\{N(s_{i-1},s_i]=2\},$$

则 $A_1,B_2,A_3,B_4,\cdots$ 相互独立，并且我们有

$$\{S_1>s_1\}=\{N(s_0,s_1]=0\}=A_1,$$

$$\{S_1>s_1,S_2\le s_2\}=A_1\{N(s_1,s_2]\ge 2\}=A_1B_2,$$

$$\{S_1>s_1,S_2\le s_2,S_3>s_3\}=A_1B_2\{N(s_2,s_3]=0\}=A_1B_2A_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\{S_1>s_1,S_2\le s_2,\cdots,S_{2k-1}>s_{2k-1}\}=A_1B_2\cdots B_{2k-2}A_{2k-1},$$

以及

$$P(A_i)=\exp(-\lambda(s_i-s_{i-1})),$$
$$P(B_i)=\frac{\lambda^2(s_i-s_{i-1})^2}{2}\exp(-\lambda(s_i-s_{i-1})).$$

5.1　呼叫流的概率分布

先计算 S_n 的密度函数. 首先由 (5.1) 我们可以得到 S_n 的分布函数

$$\begin{aligned}F_n(t)&=P(S_n\le t)=P(N(t)\ge n)\\&=1-P(N(t)<n)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

函数 $F_n(t)$ 连续，在 $(0,\infty)$ 中可导，求导数得到 S_n 的密度函数

$$\begin{aligned}f_n(t)=F_n'(t)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\lambda e^{-\lambda t}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda e^{-\lambda t}\\&=\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda t}=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t},\ t\ge 0.\end{aligned}$$

于是 $S_n\sim\Gamma(n,\lambda)$ 服从参数为 n, λ 的 **Gamma 分布**.

命题 5.2

对于强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 及其呼叫流 $\{S_n\}$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) = \lambda t, t \in [0, \infty).$$

习题 5.1

证明上述命题.

推论 5.3

对于强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$，我们有 $P(N(t) = \infty) = 0$ 对任意 t 成立.

为了得到 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 的联合密度，先做一些准备. 设 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$，$G(x, y) = P(X > x, Y \leq y)$，则由

$$G(x, y) = P(Y \leq y) - F(x, y)$$

我们知在混合偏导数存在的地方有

$$\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}[P(Y \leq y) - F(x, y)] = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

一般地，我们有如下引理.

引理 5.4

设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数，

$$G_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_{2k-1} > x_{2k-1}, X_j \leq x_j, 2k \leq j \leq n).$$

则在 G_k 存在 n 阶连续混合偏导数的区域内，F 存在 n 阶连续混合偏导数，并且

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n \partial x_{n-1} \cdots \partial x_1} = (-1)^k \frac{\partial^n G_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n \partial x_{n-1} \cdots \partial x_1}.$$

证明. 对 k 作归纳法. 容易验证当 $k = 1$ 时结论成立. 设上式对于 k 成立，由

$$\{X_{2k+1} > x_{2k+1}\} = \{X_{2k+1} > -\infty\} - \{X_{2k+1} \leq x_{2k+1}\}$$

我们有

$$\begin{aligned}
&G_{k+1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
=&P(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_{2k+1} > x_{2k+1}, X_j \leq x_j, 2k+2 \leq j \leq n) \\
=&P(X_1 > x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_{2k+1} > -\infty, X_j \leq x_j, 2k+2 \leq j \leq n) - G_k(x_1, x_2, \cdots, x_n).
\end{aligned}$$

上式两边先对 x_{2k+1} 求偏导数，然后对其它的 x_j 求偏导数，交换求导数的次序后得到所求等式对 $k+1$ 成立. □

下面讨论 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 的联合分布. 设 $0 < s_1 < s_2 \cdots < s_n$，我们将利用例 5.1 的符号和结论. 对 $n = 2k-1$，

$$\begin{aligned}
&G(s_1, s_2, \cdots, s_n)\\
=&P(S_1 > s_1, S_2 \le s_2, S_3 > s_3, \cdots, S_{n-1} \le s_{n-1}, S_n > s_n)\\
=&P(A_1 B_2 \cdots B_{n-1} A_n)\\
=&P(A_1)P(B_2)\cdots P(B_{n-1})P(A_n)\\
=&e^{-\lambda s_1}\frac{(\lambda(s_2-s_1))^2}{2}e^{-\lambda(s_2-s_1)}e^{-\lambda(s_3-s_2)}\cdots\cdots\frac{(\lambda(s_{n-1}-s_{n-2}))^2}{2}e^{-\lambda(s_{n-1}-s_{n-2})}e^{-\lambda(s_n-s_{n-1})}
\end{aligned}$$

$G(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 在开区域 $D = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n)|0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n\}$ 中连续，并有连续的 n 阶混合偏导数

$$\begin{aligned}
g(s_1, s_2, \cdots, s_n) &= (-1)^k \frac{\partial^n G(s_1, s_2, \cdots, s_n)}{\partial s_n \partial s_{n-1}\cdots\partial s_1}\\
&= \lambda^n e^{-\lambda s_n},\ (s_1, s_2, \cdots, s_n) \in D.
\end{aligned}$$

对于 $n = 2k$ 可以通过相同的推导得到相应的结果. 这时我们有

$$\begin{aligned}
&G(s_1, s_2, \cdots, s_n)\\
=&P(S_1 > s_1, S_2 \le s_2, S_3 > s_3, \cdots, S_{n-1} > s_{n-1}, S_n \le s_n)\\
=&P(A_1 B_2 \cdots B_{n-2} A_{n-1}\{N(s_{n-1}, s_N] \ge 2\})\\
=&P(A_1)P(B_2)\cdots P(B_{n-2})P(A_{n-1})P(\{N(s_{n-1}, s_N] \ge 2\})\\
=&\lambda^{n-2}\frac{(s_2-s_1)^2(s_4-s_3)^2\cdots(s_{n-2}-s_{n-3})^2}{2^{k-1}}e^{-\lambda s_n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\lambda^j(s_n-s_{n-1})^j}{j!}.
\end{aligned}$$

于是和前面类似的讨论我们知 $G(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 在开区域 $D = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n)|0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n\}$ 中连续，并有连续的 n 阶混合偏导数

$$\begin{aligned}
&g(s_1, s_2, \cdots, s_n)\\
=&(-1)^k \frac{\partial^n G(s_1, s_2, \cdots, s_n)}{\partial s_n \partial s_{n-1}\cdots\partial s_1}\\
=&\lambda^{n-2}\frac{-\partial(e^{-\lambda s_n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\lambda^j(s_n-s_{n-1})^j}{j!})}{\partial s_{n-1}\partial s_n}\\
=&\lambda^{n-2}\frac{\partial(e^{-\lambda s_n}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\lambda^j(s_n-s_{n-1})^{j-1}}{(j-1)!})}{\partial s_n}\\
=&\lambda^{n-1}\frac{\partial(e^{-\lambda s_n}(e^{\lambda(s_n-s_{n-1})}-1))}{\partial s_n}\\
=&\lambda^n e^{-\lambda s_n},\ (s_1, s_2, \cdots, s_n) \in D.
\end{aligned}$$

对于上面两种情形, 不难验证 $P((S_1, S_2, \cdots, S_n) \in D) = 1$，所以由引理 5.4 和定理 1.13 我们知 $g(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 是 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 的联合密度.

定理 5.5

设 $\{S_j\}$ 是强度为 λ 的泊松过程的呼叫流，则对 $n \ge 1$，

(1) $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 有联合密度

$$g(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s},\ 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n;$$

(2) S_n 服从 $\Gamma(n, \lambda)$ 分布，有密度函数

$$g_n(s) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\lambda s},\ s \geq 0.$$

5.2 等待间隔 X_n 的分布

设 $\{S_n\}$ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的呼叫流，我们记

$$X_n = S_n - S_{n-1},\ n = 1, 2, \cdots,$$

则 X_n 是 $n-1$ 个事件发生后，等待第 n 个事件发生的等待间隔，称为第 n 个 **等待间隔**.

由定理 5.5 (2) 我们知 $X_1 = S_1$ 有密度函数 $\lambda e^{-\lambda t}(t > 0)$, 所以 X_1 服从参数是 λ 的指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$. 为了得到 $\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布, 我们要用到如下引理.

定理 5.6

泊松过程 $\{N(t)\}$ 的等待间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的相互独立的随机变量.

证明. 由于 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 是连续型随机向量，所以 $X_j = S_j - S_{j-1}$ 是连续型随机变量，满足 $P(X_j > 0) = 1$. 引入

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n),\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$S = (S_1, S_2, \cdots, S_n),\ \boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_n),$$

$$D = \{\boldsymbol{x} | x_j > 0, 1 \leq j \leq n\},$$

我们有 $P(X \in D) = 1$. 对于 $\boldsymbol{x} \in D$ 以及 $s_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j, 1 \leq j \leq n$, 有

(a) $\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}\}$;

(b) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ 是 D 到值域 $A_n = \{\boldsymbol{s} | 0 < s_1 < \cdots < s_n\}$ 的可逆映射，偏导数连续并满足

$$|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{x}}| = 1,\ \boldsymbol{x} \in D,$$

根据引理 1.16 得到 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{s}) &= \lambda^n e^{-\lambda s_n} = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j),\ \boldsymbol{x} \in D, \end{aligned}$$

其中 $f_j(x_j) = \lambda e^{-\lambda x_j}(x_j > 0)$ 是 X_j 的边缘密度. 再由定理 1.14 我们知它们相互独立. □

5.3 到达时刻的条件分布

用 $N(t)$ 表示放射物 V 在 t 秒内释放的 α 粒子数. 设 $\{N(t)\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程. 已知 $N(t)=1$ 时, S_1 是这个 α 粒子的释放时刻. 对 $s\in(0,t)$, 有

$$\begin{aligned}P(S_1\le s|N(t)=1)&=P(N(s)\ge 1|N(t)=1)\\&=\frac{P(N(s)=1,N(t)=1}{P(N(t)=1)}\\&=\frac{P(N(s)=1,N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}\\&=\frac{\lambda se^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda te^{-\lambda t}}\\&=\frac{s}{t}.\end{aligned}$$

这说明已知 $(0,t]$ 内有一个粒子释放出来的条件下, 释放时刻 S_1 在 $[0,t]$ 中均匀分布.

已知 $N(t)=n$ 时, 设想把 V 瓜分成 m 块, 每个小块在 $(0,t]$ 内至多释放出一个粒子. 显然 $m\ge n$. 根据上面分析, 已知第 i 个小块在 $(0,t]$ 内释放粒子的条件下, 这个粒子的释放时间在 $[0,t]$ 内均匀分布, 并且无论哪 n 个小块释放粒子, 这 n 个释放时间是相互独立的. 现在用 $U_1,U_1,\cdots,U_n$ 表示这 n 个释放时间, 则 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 独立同分布且在 $[0,t]$ 内均匀分布, 其次序统计量 $(U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)})$ 等于已知 $N(t)=n$ 时的 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$, 记做

$$(U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)})=(S_1,S_2,\cdots,S_n)|N(t)=n.$$

对于事件 A 和随机向量 $\mathbf{S}$, $\mathbf{U}$, 这里和以后用 $\mathbf{U}=\mathbf{S}|A$ 表示 $\mathbf{U}$ 等于已知 $\mathbf{A}$ 发生后的 $\mathbf{S}$.

对于一般的泊松过程 $\{N(t)\}$, 可以把 $N(t)$ 设想成某块放射物在 $(0,t]$ 内释放的粒子数. 上面分析说明在条件 $N(t)=n$ 下, $[0,t]$ 中的这 n 个事件的发生时刻, 在不考虑先后次序时, 是独立同分布且在 $[0,t]$ 中均匀分布的. 下面是具体的数学推导.

对于 $n=1,2,\cdots$，引入

$$\boldsymbol{s}_n=(s_1,s_2,\cdots,s_n),\ \ A_n=\{\boldsymbol{s}_n|0<s_1<s_2<\cdots<s_n<t\}.$$

定理 5.7

在条件 $N(t)=n(>0)$ 下，$\boldsymbol{S}_n=(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 有联合密度

$$h_n(\boldsymbol{s}_n)=\frac{n!}{t^n},s_n\in A_n.$$

证明. 由定理 **??** 知道 $\boldsymbol{S}_{n+1}=\ S_1,S_2,\cdots,S_{n+1})$ 有联合密度函数

$$g_{n+1}(\boldsymbol{s}_{n+1})=\lambda^{n+1}e^{-\lambda s_{n+1}},\ 0<s_1<s_2<\cdots<s_{n+1}.$$

对于 $s_n\in A_n$，我们得到条件分布函数

$$\begin{aligned}H_n(\boldsymbol{s}_n)&=P(S_j\le s_j,1\le j\le n|N(t)=n)\\&=\frac{1}{P(N(t)=n)}P(S_j\le s_j,1\le j\le n;N(t)=n)\\&=\frac{1}{P(N(t)=n)}P(S_j\le s_j,1\le j\le n;S_n\le t,S_{n+1}>t)\\&=\frac{n!}{(\lambda t)^n}e^{\lambda t}P(S_j\le s_j,1\le j\le n;S_{n+1}>t)\\&=\frac{n!}{(\lambda t)^n}e^{\lambda t}\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\cdots\int_0^{s_n}\int_t^{\infty}g_{n+1}(t_1,t_2.\cdots,t_{n+1})dt_{n+1}dt_n\cdots dt_1.\end{aligned}$$

$H_n(\boldsymbol{s}_n)$ 在 A_n 上有连续的 n 阶混合偏导数. 由 $P(\boldsymbol{S}_n \in A_n|N(t)=n)=1$ 以及定理 1.13 知道对 $H_n(s_n)$ 依次求偏导得到 $\boldsymbol{S}_n=(S_1,\cdots,S_n)$ 的条件联合密度

$$
\begin{aligned}
h_n(\boldsymbol{s}_n) &= \frac{\partial^n H_n(\boldsymbol{s}_n)}{\partial s_n \cdots \partial s_2 \partial s_1} \\
&= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_n} \int_t^{\infty} g_{n+1}(t_1, t_2 \cdot \cdots, t_{n+1}) dt_{n+1} \\
&= \frac{n!}{(\lambda t)^n} e^{\lambda t} \int_t^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} \\
&= \frac{n!}{t^n} e^{\lambda t} \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{n!}{t^n},\ 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t.
\end{aligned}
$$

从而得证. □

现设 U 在 $[0,t]$ 上均匀分布，$U_1,U_2,\cdots,U_n$ 是来自总体 U 的随机变量，则他们的从小到大次序统计量 $(U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)})$ 有联合密度

$$h_n(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\frac{n!}{t^n},\ 0<u_1<u_2<\cdots<u_n<t.$$

所以已知 $[0,t]$ 内有 n 个事件发生的条件下,以 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 表示这 n 个时间的发生时刻时,$V_1,V_2,\cdots,V_n$ 的次序统计量 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 与 $(U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)})$ 同分布. 据此我们说在条件 $N(t)=n$ 下, 不考虑先后次序时, $[0,t]$ 中的这 n 个事件的发生时刻 $V_1,\cdots,V_n$ 是独立同分布的且在 $[0,t]$ 中是均匀分布的, 或者称这 n 个发生时刻是在 $[0,t]$ 中均匀混乱的.

设 X,Y 是随机变量，A 是随机事件. 如果在 A 发生的条件下，X 的条件分布与 Y 的分布相同，即 $P(X\le x|A)=P(Y\le x)$，$x\in\mathbb{R}$，则称 $Z|A$ 和 Y 同分布. 所以 $(S_1,\cdots,S_n)|N(t)=n$ 和 $(U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)})$ 同分布.

推论 5.8

设 $U\sim U[0,t]$，$U_1,U_2,\cdots,U_n$ 是来自总体 U 的随机变量，$h(s)$ 是实值 (可测) 函数，则

(1) $\sum_{i=1}^n S_i|N(t)=n$ 和 $\sum_{i=1}^n U_i$ 同分布；

(2) $\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t)=n$ 和 $\sum_{i=1}^n h(U_i)$ 同分布；

(3) 当 $Eh(U)$ 存在时，$E(\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t)=n)=nEh(U)$.

证明. (1) 因为 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)|N(t)=n$ 和 $(U_{(1)},U_{(2)},\cdots,U_{(n)})$ 同分布，所以 $\sum_{i=1}^n S_i|N(t)=n$ 和 $\sum_{i=1}^n U_i$ 同分布；

(2) 同理得 $\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t)=n$ 和 $\sum_{i=1}^n h(U_i)=\sum_{i=1}^n h(U_{(i)})$ 同分布；

(3) 同分布的随机变量有相同的数学期望，所以有

$$E(\sum_{i=1}^n h(S_i)|N(t)=n)=\sum_{i=1}^n E[h(U_i)]=nEh(U).$$ □

对常数 a, 在上面例子中还容易计算出

$$Ee^{aU}=\frac{1}{t}\int_0^t e^{as}ds=\frac{1}{at}(e^{at}-1).$$

习题 5.2

在上述推论的条件下，当 $E[h(U)]$ 存在时，证明

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} h(S_i)] = \lambda t E[h(U)].$$

5.4 简单呼叫流

如果 $\{Y_j\}$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量，就称

$$\xi_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,\ n = 1, 2, \cdots$$

是简单呼叫流. 定理 5.6 说明泊松过程的呼叫流 $\{S_n\}$ 是简单呼叫流. 简单呼叫流又称为**泊松流**.

设 $\{\xi_n\}$ 是简单呼叫流，认为每个呼叫时刻 ξ_n 有一个事件 (呼叫) 发生，相应的计数过程记做 $\{M(t)\}$. 下面说明 $\{M(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程. 由于 $M(t) = m$ 的充分必要条件是恰有 m 个 $\{\xi_j \le t\}$ 发生，于是可以用简单呼叫流 $\{\xi_n\}$ 将计数过程 $\{M(t)\}$ 表达出来：

$$M(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I[\xi_j \le t], t \in [0, \infty). \tag{5.2}$$

这里 $I[A]$ 是事件 A 的示性函数.

对于强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 及其呼叫流 $\{S_n\}$，也有

$$N(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I[S_j \le t],\ t \in [0, \infty).$$

由 $\{\xi_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 同分布知道对 $n \ge 1$ 和 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$(M(t_1), M(t_2), \cdots, M(t_n)) \text{ 与 } (N(t_1), N(t_2), \cdots, N(t_n))$$

同分布. 从而我们知 $\{M(t)\}$ 也是强度为 λ 的泊松过程. 具体验证留做习题.

注记 5.9

所以，我们有如下给出泊松过程的第三种定义：泊松过程是简单呼叫流所对应的计数过程 (参见 (5.2)).

例 5.10

汽车按照强度为 λ 的泊松流通过广场，第 i 辆汽车通过时造成的空气污染为 D_i. 污染随着时间减弱，经过时间 s 减弱为 $D_i e^{-as}$，其中正常数 a 称为扩散常数. 假设 $D_1, D_2, \cdots$ 是来自总体 D 的随机变量，且与泊松流独立. 计算 $[0, t]$ 内通过的汽车在 t 时造成的平均污染 (即造成的污染的期望值).

解. 用 $\{N(t)\}$ 表示所述的泊松过程，用 S_i 表示第 i 辆汽车的通过时间. $[0, t]$ 内通过了 $N(t)$ 辆汽车，造成 t 时的污染是

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-a(t-S_i)}.$$

注意由假设 D_i 与 $N(t), S_i$ 独立. 利用推论 5.8 的结论得到

$$\begin{aligned}
E(D(t)|N(t)=n) &= \sum_{i=1}^{n} E(D_i e^{-a(t-S_i)}|N(t)=n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(D_i e^{-at})E(a^{aS_i}|N(t)=n) \\
&= E(De^{-at})E(\sum_{i=1}^{n} a^{aS_i}|N(t)=n) \\
&= E(De^{-at})E\sum_{i=1}^{n} e^{aU_i} \\
&= EDe^{-at}\frac{n}{at}(e^{at}-1) \\
&= \frac{nED}{at}(1-e^{-at}).
\end{aligned}$$

于是

$$E(D(t)|N(t)) = \frac{N(t)ED}{at}(1-e^{-at}).$$

最后得到

$$E(D(t)) = \frac{E(N(t))E(D)}{at}(1-e^{-at}) = \frac{\lambda E(D)}{a}(1-e^{-\lambda t}). \qquad \square$$

容易看出，$E[D(t)]$ 和强度 λ 以及单辆汽车的平均污染 $E[D]$ 成正比. 因为 $D(t)$ 关于 a 递减，所以 $E[D(t)]$ 也是 a 的减函数. 扩散常数越大，平均污染 $E[D(t)]$ 越小. 当时间 t 充分大后，空气污染就稳定在 $\lambda E[D]/a$ 附近.

5.5 习题

习题 5.3

设 $t>\tau$，$n\geq 1$.

(1) 对于强度为 λ 的泊松过程，求 $P(N(t)=n|S_1=\tau)$.

(2) 利用 (1) 中结论，求 $f_{S_1}(\tau|N(t)=n)$ 以及 $P(S_1>\tau|N(t)=n)$.

(3) 利用定理 5.7 的结论计算 $f_{S_1}(\tau|N(t)=n)$ 以及 $P(S_1>\tau|N(t)=n)$，并和 (2) 中的结果对比.

习题 5.4

乘客按每分钟 2 人的泊松流到达车站候车, 公交车每 5 分钟到达一辆. 用 W 表示时间 $(0,5]$ 内到达的乘客的候车时间之和. 当 $t=0$ 时有车辆到达. 计算 $E[W]$.

习题 5.5

对于简单呼叫流 $\{S_j\}$, 在条件 $S_n=t$ 下, 计算

$$(S_1, S_2, \cdots, S_{n-1})$$

的联合密度. 如果不考虑先后次序, 这 $n-1$ 个时间的发生时刻是如何分布的?

第 6 讲　年龄和剩余寿命, 泊松过程的汇合与分流

6.1　年龄和剩余寿命

引理 6.1

对于强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$，用 $N(t-)$ 表示区间 $[0,t)$ 内发生的事件数，则

(1) $N(t)-N(t-)=0$ a.s.;

(2) $N[s,t]=N(t)-N(s-)$ 是闭区间 $[s,t]$ 内发生的事件数；

(3) $N[s,t]=N(s,t]$ a.s..

习题 6.1

证明上面引理.

一个使用寿命服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的部件一旦失效后马上被换上同型号的备用部件继续工作. 用 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 中更换的部件数，则 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程. 通常称更换部件的时刻为**呼叫时刻**. 用 $\{S_n\}$ 表示相应的泊松流.

当 $N(t)=n$ 时，S_n 是时间 t 之前最后一次呼叫时刻，S_{n+1} 是时间 t 之后第一次呼叫时刻. 于是我们知道，$S_{N(t)}$ 是时间 t 前的最后一次呼叫时刻，$S_{N(t)+1}$ 是时间 t 之后的第一个呼叫时刻. 于是

$$S_{N(t)}\le t<S_{N(t)+1}.$$

定义

$$A(t)=t-S_{N(t)},\ R(t)=S_{N(t)+1}-t.$$

$A(t)$ 是 t 时服役的部件的使用年龄，$R(t)$ 是 t 时服役的部件的剩余寿命. 以后将 $A(t)$ 简称为 **年龄**，将 $R(t)$ 简称为 **剩余寿命**.

定理 6.2

在上面的定义下，有如下的结果：

(1) $R(t)\sim\mathcal{E}(\lambda)$;

(2) $P(A(t)\le u)=\begin{cases}1-e^{-\lambda u}, & u\in[0,t),\\ 1, & u\ge t;\end{cases}$

(3) $A(t)$ 与 $R(t)$ 独立.

证明.　(1) 对 $v\ge 0$ 有 $\{R(t)>v\}=\{N(t,t+v]=0\}$. 于是 $P(R(t)>v)=e^{-\lambda v}$，即 $R(t)\sim\mathcal{E}(\lambda)$.

(2) 由于 $A(t)\le t$，所以对 $u\ge t$，$P(A(t)\le u)=1$. 对于 $u<t$，由 $\{A(t)>u\}=\{N[t-u,t]=0\}$ 和引理 6.1 (1)，我们有

$$P(A(t)>u)=P(N(t-u,t]=0)=P(N[t-u,t]=0)=e^{-\lambda u},$$

于是 (2) 成立.

(3) 对于 $u, v \geq 0$，从 $N[t-u, t]$ 和 $N(t, t+v]$ 独立得到 $A(t)$ 和 $R(t)$ 独立. □

定理 6.2 (1) 说明时间 t 时服役的部件剩余寿命 $R(t)$ 也服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$. 该性质是由指数分布的无记忆性所决定的.

利用上面结论和关系式

$$A(t) = t - S_{N(t)}, \ R(t) = S_{N(t)+1} - t.$$

我们有

推论 6.3

$S_{N(t)}$ 和 $S_{N(t)+1}$ 的分布函数分别为

$$P(S_{N(t)} \leq s) = \begin{cases} e^{-\lambda(t-s)} & 0 \leq s \leq t, \\ 1, & s > t, \end{cases}$$

$$P(S_{N(t)+1} \leq s) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(s-t)} & 0 \leq s > t, \\ 0, & s \leq t. \end{cases}$$

习题 6.2

证明上述推论.

推论 6.4

对 $t > 0$，我们有 $P(A(t) > 0) = 1$.

证明. 我们有

$$\begin{aligned} P(A(t) > 0) &= 1 - P(A(t) = 0) \\ &= 1 - P(N(t) - N(t-) = 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

从而得证. □

指数分布的数学期望是 λ^{-1}. 如果用 $X(t)$ 表示时刻 t 时服役的部件的使用寿命，则有

$$X(t) = A(t) + R(t), \ E[X(t)] = E[A(t)] + E[R(t)] > \lambda^{-t}.$$

于是，t 时刻服役的部件的平均寿命比同型号的备用部件的平均使用寿命 $E[X_1] = \lambda^{-1}$ 要长.

注意 $A(t)$ 的分布函数在 t 处有一个跳跃高度 $e^{-\lambda t}$，用定理 6.2 (2) 得到，当 $t \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} E[A(t)] &= \int_0^\infty u dP(A(t) \leq u) \\ &= \int_0^t \lambda u e^{-\lambda u} du + t e^{-\lambda t} \\ &\to \int_0^\infty \lambda u e^{-\lambda u} du = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{t\to\infty} E[X(t)] = \lim_{t\to\infty} (E[A(t)] + E[R(t)]) = 2\lambda^{-1} = 2E[X_1].$$

上式说明了，如果泊松过程在无穷远之前就开始了，则 t 时服役的部件的平均使用寿命是同型号备用部件的平均寿命的两倍.

注记 6.5

发生上述现象并不足为怪. 因为实际使用寿命长的部件在 t 时被遇到的概率比实际寿命短的部件被遇到的概率要大.

例 6.6

北京前门的公交车站，每 6 分钟发出一辆开往颐和园的公交车. 由于随机因素的干扰，汽车到达圆明园站时，两车之间的间隔时间成为独立同分布，服从指数分布的随机变量. 设某乘客等可能地到达车站候车，计算

(1) 他在前门候车时的平均候车时间；

(2) 他在圆明园站候车时的平均候车时间.

解. (1) 用 T 表示甲到达前门站的时间. 对于任意长度为 6 分钟的发车间隔 $(0,6]$，已知 $T \in (0,6]$ 时，T 在 $(0,6]$ 中均匀分布. 所以平均候车时间是 3 分钟.

(2) 根据题意，公交车按照强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 到达圆明园站. 由于这路公交车都要经过圆明园站，所以平均每 6 分钟停靠一辆，即有 $E[N(6)] = 6\lambda = 1$. 于是 $\lambda = 1/6$. 按照剩余寿命的定义，在 t 时到达的乘客的候车时间为 $R(t)$. 由 $R(t) \sim \mathcal{E}(\lambda)$ 知道平均候车时间为 $E[R(t)] = 6$(分钟). □

注记 6.7

上例的结果告诉我们，市内公交车的始发站和终点站距离太远时，会延长乘客的平均候车时间和降低公交车的平均利用率.

6.2 泊松过程的汇合

定理 6.8

设 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 是相互独立的、强度分别为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程，则

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t),\ t \geq 0$$

是强度为 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程.

证明. 只需验证定义 4.7 的 (1)，(2) 和 (3). 因为 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 满足定义 4.4 的 (a)，(b) 和 (c)，所以有

$$N(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0 + 0 = 0.$$

于是 (1) 成立. 对于任何正整数 n 以及 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，由 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 的独立增量性以及 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 是相互独立的我们知

$$N_1(t_{j-1}, t_j],\ N_2(t_{j-1}, t_j],\ j = 1, 2, \cdots, n$$

相互独立. 于是

$$N(t_{j-1}, t_j] = N_1(t_{j-1}, t_j] + N_2(t_{j-1}, t_j],\ j = 1, 2, \cdots, n$$

相互独立，所以 $\{N(t)\}$ 是独立增量过程.

又因为 $N_1(t_1,t_2]$ 和 $N_1(t_1+s,t_2+s]$ 同分布，$N_2(t_1,t_2]$ 和 $N_2(t_1+s,t_2+s]$ 同分布，所以 $N(t_1,t_2] = N_1(t_1,t_2]+N_2(t_1,t_2]$ 与

$$N(t_1+s,t_2+s] = N_1(t_1+s,t_2+s] + N_2(t_1+s,t_2+s]$$

同分布. 所以 $\{N(t)\}$ 是平稳增量过程. 于是 (2) 成立.

下面验证普通性：设 $\lambda = \lambda_1+\lambda_2$. 我们有当 $h\to 0$ 时，

$$\begin{aligned}P(N(h)=1) &= P(N_1(h)=1,N_2(h)=0)+P(N_1(h)=0,N_2(h)=1)\\ &= P(N_1(h)=1)P(N_2(h)=0)+P(N_1(h)=0)P(N_2(h)=1)\\ &= (\lambda_1 h+o(h))(1-\lambda_1 h+o(h))+(\lambda_2 h+o(h))(1-\lambda_2 h+o(h))\\ &= (\lambda_1+\lambda_2)h+o(h) = \lambda h+o(h).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(N(h)=0) &= P(N_1(h)=0,N_2(h)=0)\\ &= (1-\lambda_1 h+o(h))(1-\lambda_2 h+o(h))\\ &= 1-(\lambda_1+\lambda_2)h+o(h) = 1-\lambda h+o(h).\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}P(N(h)\geq 2) &= 1-P(N(h)=0)-P(N(h)=1)\\ &= 1-[1-\lambda h+o(h)]-[\lambda h+o(h)] = o(h).\end{aligned}$$

于是 (3) 成立. □

习题 6.3

应用定义 4.4 验证 $N(t)$ 是强度为 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程.

应用归纳法我们知

推论 6.9

设 $\{N_j(t)\}(j=1,2,\cdots,m)$ 是相互独立的，强度分别为 λ_j 的泊松过程，则

$$N(t) = N_1(t)+N_2(t)+\cdots+N_m(t),\ t\geq 0$$

是强度为 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m$ 的泊松过程.

上面推论所描述的性质称为泊松过程的**可加性**.

6.3 泊松过程的分流

设旅客按照强度为 λ 的泊松过程到达长途汽车站，每次到达的旅客乘 A 线的概率是 p，乘 B 线的概率为 $q=1-p$，且与到达时间独立，也与其他的到达行为独立. 用 $N_1(t)$ 表示时间 $[0,t]$ 内乘 A 线的旅客到达次数，用 $N_2(t)$ 表示时间 $[0,t]$ 内乘 B 线的旅客到达次数. 因为旅客选择 A 线还是 B 线仅由他自己决定，与其他旅客的行为无关. 所以前往 A 线的旅客流与前往 B 线的旅客流是独立的，也就是说计数过程 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 应当是相互独立的. 用 λ_1 和 λ_2 分别表示他们的强度，于是 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.

引入独立同分布的随机变量

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{当第 } j \text{ 次到达乘 A 线}, \\ 0, & \text{当第 } j \text{ 次到达乘 B 线}, \end{cases} \tag{6.1}$$

则有

$$P(Y_j = 1) = p,\ P(Y_j = 0) = q,\ j = 1, 2, \cdot.$$

如果已知在时刻 $[0, t]$ 内有 $N(t) = n$ 次到达，则 $[0, t]$ 内有 $\sum_{j=1}^{n} Y_j$ 次到达是乘 A 线的. 当在时刻 $[0, t]$ 内有 $N(t)$ 次到达，则有

$$N_1(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \tag{6.2}$$

次到达是乘 A 线的. 同理有

$$N_2(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (1 - Y_j) \tag{6.3}$$

次到达是乘 B 线的.

这里和以后对 $a < b$，我们总是规定 $\sum_{j=b}^{a}(\cdot) = 0$. 对于 $k < 0$ 或 $k > n$，总规定 $C_n^k = 0$.

定理 6.10

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，$\{Y_j\}$ 是独立同分布的随机序列，服从两点分布 (6.1). 计数过程 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 分别由 (6.2) 和 (6.3) 定义. 如果 $\{Y_j\}$ 与 $\{N(t)\}$ 独立，则 $\{N_1(t)\}$ 与 $\{N_2(t)\}$ 相互独立，分别是强度为 $\lambda_1 = \lambda p$ 和 $\lambda_2 = \lambda q$ 的泊松过程.

在上面定理中，$\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 被称为 $N(t)$ 的 **分流过程**.

证明. 对于 $0 \le s < t$，

$$N_1(s, t] = N_1(t) - N_1(s) = \sum_{j=N(s)+1}^{N(t)} Y_j \tag{6.4}$$

是时刻 $(s, t]$ 内乘 A 线的乘客数. 因为 $\{Y_j\}$ 与 $\{N(t)\}$ 独立，对于 $k \ge l$，容易计算出

$$\begin{aligned} P(N_1(s, t] = n | N(s) = l, N(t) = k) &= P(\sum_{j=l+1}^{k} Y_j = n | N(s) = l, N(t) = k) \\ &= P(\sum_{j=l+1}^{k} Y_j = n) = P(\sum_{j=1}^{k-l} Y_j = n) \\ &= g(k - l, n), \end{aligned}$$

其中

$$g(k, n) = P(\sum_{j=l}^{k} Y_j = n)$$

满足 $g(1, 1) = p$ 以及对任意 $n \ge 1$，$g(0.n) = 0$. 由条件概率的定义我们知

$$P(N_1(s, t] = n | N(s), N(t)) = g(N(s, t], n).$$

对上式求期望得到

$$P(N_1(s, t] = n) = E[g(N(s, t], n)].$$

我们证明 $\{N_1(t)\}$ 为强度 $\lambda_1 = \lambda p_1$ 的泊松过程，我们验证定义 4.4 中的条件 (1)，(2)，(3).

(1) $N_1(0)=\sum_{j=1}^{0}Y_j=0.$

(2) **独立增量性**: 对任意正整数 m，$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m$ 以及整数 $0=n_0\le n_1\le n_2\le\cdots\le n_m$，定义

$$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{N}(t_1),N(t_2),\cdots,N(t_m)),\ \boldsymbol{n}=(n_1,n_2,\cdots,n_m).$$

从 (6.4) 知道，在条件 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{n}$ 下，随机变量

$$N_1(t_{j-1},t_j]=\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j}Y_i,\ j=1,2,\cdots,m$$

相互独立. 于是得到

$$\begin{aligned}P(N_1(t_{j-1},t_j]=k_j,1\le j\le m|\boldsymbol{N}=\boldsymbol{n})&=P(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j}Y_i=k_i,1\le j\le m|\boldsymbol{N}=\boldsymbol{n})\\&=P(\sum_{i=1}^{n_1}Y_i=k_1)P(\sum_{i=n_1+1}^{n_2}Y_i=k_2)\cdots P(\sum_{i=n_{m-1}+1}^{n_m}Y_i=k_m)\\&=g(n_1,k_1)g(n_2-n_1,k_2)\cdots g(n_m-n_{m-1},k_m).\end{aligned}$$

按条件概率的定义我们知

$$P(N_1(t_{j-1},t_j]=k_j,1\le j\le m|\boldsymbol{N})=g(N(t_1),k_1)g(N(t_1,t_2],k_2)\cdots g(N(t_{m-1},t_m],k_m).$$

对于上式求数学期望，利用 $\{N(t)\}$ 的独立增量性我们知

$$\begin{aligned}P(N_1(t_{j-1},t_j]=k_j,1\le j\le m)&=E[g(N(t_1),k_1)]E[g(N(t_1,t_2],k_2)]\cdots E[g(N(t_{m-1},t_m],k_m)]\\&=P(N_1(t_0,t_1]=k_1)P(N_1(t_1,t_2]=k_2)\cdots P(N_1(t_{m-1},t_m]=k_m).\end{aligned}$$

这说明随机变量 $N_1(t_{j-1},t_j](1\le j\le n)$ 相互独立. 于是 $\{N_1(t)\}$ 是独立增量过程.

平稳增量性：因为 $N(t_1,t_2]$ 和 $N(t_1+s,t_2+s]$ 同分布，所以我们知对任意 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}P(N(t_1,t_2]=n)&=E[g(N(t_1,t_2],n)]\\&=E[g(N(t_1+s,t_2+s],n)]\\&=P(N(t_1+s,t_2+s]=n)\end{aligned}$$

于是 $N_1(t_1,t_2]$ 和 $N_1(t_1+s,t_2+s]$ 同分布.

(3) **普通性**: 注意到 $g(0,1)=0$，$g(1,1)=p$ 我们有

$$\begin{aligned}P(N_1(t,t+h]=1)&=E[g(N(t,t+h],1)]\\&=E[g(N(t,t+h],1)(I[N(t,t+h]=1]+i[N(t,t+h]\ge 2])]\\&=g(1,1)P(N(t,t+h]=1)+o(h)\\&=p(\lambda h+o(h))+o(h)=p\lambda h+o(h).\end{aligned}$$

因为 $N_1(s,t]\le N(s,t]$ 对 $s<t$ 成立，故由

$$P(N_1(t,t+h]\ge 2)\le P(N(t,t+h]\ge 2)=o(h)$$

我们有 $P(N_1(t,t+h]\ge 2)=o(h)$.

综上我们知 $\{N_1(t)\}$ 是强度为 λp 的泊松过程. 完全对称地可以证明 $\{N_2\}$ 是强度为 λq 的泊松过程.

下面证明 $\{N_1(t)\}$ 和 $\{N_2(t)\}$ 相互独立. 由命题 4.3，我们只需要证明对于任何 $n \geq 1$，$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，随机变量

$$(N_1(t_1), N_1(t_2), \cdots, N_1(t_n)) \text{ 和 } (N_2(t_1), N_2(t_2), \cdots, N_2(t_n))$$

独立. 对于整数

$$0 = k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n,\ 0 = m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n,$$

引入 $n_j = k_j + m_j$，$\boldsymbol{n} = (k_1 + m_1, k_2 + m_2, \cdots, \cdots, k_n + m_n)$. 随机变量

$$\xi_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} Y_i,\ j = 1, 2, \cdots, n$$

相互独立. 注意 ξ_j 服从二项分布

$$\mathcal{B}(n_j - n_{j-1}, p),$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}
&P(N_1(t_j) = k_j, N_2(t_j) = m_j; 1 \leq j \leq n) \\
=&P(N_1(t_j) = k_j, N_2(t_j) = n_j; 1 \leq j \leq n) \\
=&P(N_1(t_{j-1}, t_j] = k_j - k_{j-1}, N(t_j) = n_j; 1 \leq j \leq n) \\
=&P(\xi_j = k_j - k_{j-1}, N(t_{j-1}, t_j] = n_j - n_{j-1}; 1 \leq j \leq n) \\
=&\prod_{j=1}^{n} [P(\xi_j = k_j - k_{j-1}) P(N(t_{j-1}, t_j] = n_j - n_{j-1})] \\
=&\prod_{i=1}^{n} \Big[\frac{(n_j - n_{j-1})!}{(k_j - k_{j-1})!(m_j - m_{j-1})!} p^{k_j - k_{j-1}} q^{m_j - m_{j-1}} \cdot \frac{[\lambda(t_j - t_{j-1})]^{n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} \Big] \\
=&\prod_{i=1}^{n} \Big[\frac{[\lambda p(t_j - t_{j-1})]^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} e^{-\lambda p(t_j - t_{j-1})} \frac{[\lambda q(t_j - t_{j-1})]^{m_j - m_{j-1}}}{(m_j - m_{j-1})!} e^{-\lambda q(t_j - t_{j-1})} \Big] = P(N_1(t_j) = k_j) \\
=&P(N_1(t_j) = k_j, 1 \leq j \leq n) P(N_2(t_j) = m_j, 1 \leq j \leq n).
\end{aligned}$$

这说明 $(N_1(t_1), N_1(t_2), \cdots, N_1(t_n))$ 和 $(N_2(t_1), N_2(t_2), \cdots, N_2(t_n))$ 独立. □

定理 6.11

设旅客按强度为 λ 的泊松过程到达某长途汽车站，每次到达的旅客以概率 p_i 前往 A_i 线，且前往哪个路线与到达时间独立，也与其他的到达行为独立. 用 $N_i(t)$ 表示 $[0, t]$ 内前往 A_i 线的到达次数时，$\{N_i(t)\}$ 是强度 $\lambda_i = p_i \lambda$ 的泊松过程. 当 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ 时，这 n 个泊松过程是相互独立的.

上述性质称为泊松过程的**可分解性**.

例 6.12

从时刻 $t = 0$ 开始，客户按强度为 λ 的泊松流点击一个网站. 每个客户点击后的浏览时间是相互独立的，有共同的分布函数 $G(t)$. 用 $N_1(t)$ 表示 t 时刻已经离线的客户数，用 $N_2(t)$ 表示 t 时在

线的客户数，则 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是两个相互独立的泊松随机变量，分别有数学期望

$$E[N_1(t)] = \lambda \int_0^t G(s)ds,\ E[N_2(t)] = \lambda \int_0^t \overline{G}(s)ds,$$

其中 $\overline{G}(s) = 1 - G(s)$.

证明. 对于一个客户来讲，用 S 表示他进入网站的时间，用 A 表示他 t 时已经离线，用 Y 表示他的在线时间. 对于 $s \le t$，有

$$P(A|S = s) = P(Y \le t - s) = G(t - s).$$

因为在 $S \le t$ 条件下，S 在 $[0, t]$ 内均匀分布，且 $P_t(A) \equiv P(A|S \le t)$ 是概率，所以

$$\begin{aligned}
p = P_t(A) &= \int_0^t P_t(A|S = s)dP_t(S \le s) = \int_0^t P(A|S \le t, S = s)dP(S \le s|S \le t)\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t P(A|S = s)ds = \frac{1}{t}\int_0^t G(t - s)ds = \frac{1}{t}\int_0^t G(s)ds,\\
q = P(A^c|S \le t) &= 1 - p = \frac{1}{t}\int_0^t \bar{G}(s)ds.
\end{aligned}$$

每个在时刻 $[0, t]$ 内进入网站的人在 t 时离线的概率是 p，在线的概率是 q，与其他客户的行为独立. 用 $\{N(t)\}$ 表示所述的泊松过程，利用二项分布得到

$$P(N_1(t) = k, N_2(t) = j|N(t) = k + j) = C_{k+j}^k p^k q^j.$$

于是得到

$$\begin{aligned}
P(N_1(t), N_2(t) = j) &= P(N(t) = k + j)P(N_1(t) = k, N_2(t) = j|N(t) = k + j)\\
&= P(N(t) = k + j)C_{k+j}^k p^k q^j\\
&= \frac{(\lambda tp)^k}{k!}e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda tq)^j}{j!}e^{-\lambda tq}.
\end{aligned}$$

分别对 j, k 求和，就得到边缘分布

$$P(N_1(t) = k) = \frac{(\lambda tp)^k}{k!}e^{-\lambda tp},\ P(N_2(t) = j) = \frac{(\lambda tq)^j}{j!}e^{-\lambda tq}.$$

这说明 $N_1(t), N_2(t)$ 是相互独立的泊松随机变量，分别有数学期望 λtp 和 λtq，即有

$$E[N_1(t)] = \lambda tp = \lambda \int_0^t G(s)ds,\ E[N_2(t)] = \lambda tq = \lambda \int_0^t \overline{G}(s)ds.$$

从而得证. □

用 $b_G = \inf\{s|G(s) = 1\}$ 表示 $G(t)$ 的右端点，用 μ_G 表示 $G(t)$ 的数学期望. 当 $t \ge b_G$ 时，

$$E[N_2(t)] = \lambda \int_0^{b_G} \overline{G}(s)ds = \lambda\mu_G,$$

$$E[N_1(t)] = E[N(t)] - E[N_2(t)] = \lambda(t - \mu_G),$$

这说明 $t \ge b_G$ 后，在线的客户平均数稳定在 $e[N_2(t)] = \lambda\mu_G$. 在 $(b_G, b_G + t]$ 中离线的客户数

$$N_3(t) = N_1(t + b_G) - N_1(b_G),\ t \ge 0$$

有数学期望

$$E[N_3(t)] = E[N_1(t+b_G)] - E[N_1(b_G)] = \lambda t.$$

上述例子可以有如下一般的描述. 假设有 k 种可能类型的事件, 而一个事件被分类为类型 i $(i = 1, \cdots, k)$ 的概率依赖于事件发生的时间, 但独立于之前发生的任何事件. 特别地, 假设一个在时间 y 发生事件被分类为类型 i $(i = 1, \cdots, k)$ 的概率为 $P_i(y)$, 其中 $\sum_{i=1}^k P_i(y) = 1$.

命题 6.13

如果 $N_i(t)$ $(i = 1, \cdots, k)$ 表示到时刻 t 为止类型 1 事件发生的个数, 那么 $N_i(t)$ $(i = 1, \cdots, k)$ 是均值

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s)ds$$

的泊松随机变量.

6.4 应用: 追踪感染 HIV 的人数

从个体感染 HIV (人体免疫缺陷病毒) 到症状出现, 有相对较长的潜伏期. 因此, 对于卫生部门来说, 对任意给定时间确定总体中的感染人数很困难. 我们现在介绍一个描述这一现象的初级近似模型, 以大致估计受感染的人数.

我们假设感染 HIV 的人数构成一个强度为 λ 的泊松过程. 假设个体从感染到出现症状的时间是服从已知分布的随机变量. 同时假设不同的感染个体的潜伏期是独立的.

令 $N_1(t)$ 为到时刻 t 为止已经出现症状的人数, $N_2(t)$ 为到时刻 t 为止 HIV 阳性但是还没有出现任何症状的人数. 由于在时刻 s 受到感染的个体以概率 $G(t-s)$ 在时刻 t 出现症状, 而以概率 $\overline{G}(t-s)$ 在时刻 t 不出现症状. 因此由命题 6.13 知, $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 是独立的泊松随机变量, 其均值分别为

$$E[N_1] = \lambda \int_0^t G(t-s)ds = \lambda \int_0^t G(y)dy$$

和

$$E[N_2] = \lambda \int_0^t \overline{G}(t-s)ds = \lambda \int_0^t \overline{G}(y)dy.$$

如果我们知道 λ, 那么我们可以通过均值 $E[N_2(t)]$ 来估计受到感染但是在时刻 t 没有出现症状的人数 $N_2(t)$. 但是由于 λ 未知, 我们需要先得到它的一个估计. 我们现在知道 $N_1(t)$ 的值, 从而可以将它作为均值 $E[N_1(t)]$ 的估计, 即如果到时刻 t 为止出现症状的人数为 n_1, 那么我们可以估计

$$n_1 \approx E[N_1(t)] = \lambda \int_0^t G(y)dy.$$

从而我们可以用

$$\hat{\lambda} = n_1 / \int_0^t G(y)dy$$

来估计 λ. 利用 λ 的这个估计来估计 $N_2(t)$:

$$N_2(t) \text{ 的估计} = \hat{\lambda} \int_0^t \overline{G}(y)dy = \frac{n_1 \int_0^t \overline{G}(y)dy}{\int_0^t G(y)dy}$$

来估计受到感染但是在时间 t 没有出现症状的人数.

6.5 习题

习题 6.4

设 $(N(T), t \geq 0)$ 是参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程, S_m 为第 m 个事件发生的时刻 (特别地, $S_0 = 0$). 固定 $t > 0$, 令 $L(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$. 求 $L(t)$ 的密度函数.

第 7 讲　泊松过程的推广

7.1　复合泊松过程

例 7.1

某零件在运行过程中受到撞击. 用 $N(t)$ 表示 $(0,t]$ 时间段内该零件受到的撞击次数，经验表明 $\mathbf{N}=(N(t),t\geq 0)$ 是参数为 $\lambda>0$ 的泊松过程. 每次撞击会给零件带来一定的磨损，其磨损量大小是随机的，分布函数为 $G(x)$. 假设各次磨损量为 $\xi_1,\xi_2,\cdots$，具有分布函数 $G(x)$，并且相互独立. 一个基本问题是：$(0,t]$ 内该零件的磨损总量是多少？

这个数至关重要，它直接影响零件的使用寿命，决定什么时候需要更换零件. 根据上述假设，$(0,t]$ 内磨损总量为

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i.$$

我们再来看一个例子. 讨论旅客按强度为 λ 的泊松过程到达长途汽车站时, 我们把相约的到达视为一次到达. 如果第 i 次到达的旅客数是 Z_i 时, $[0,t]$ 内到达了多少旅客呢?

如果已知 $[0,t]$ 内有 $N(t)=n$ 次到达，则 $[0,t]$ 内到达的旅客数是 $\sum_{j=1}^{n}Z_j$. 当 $[0,t]$ 内有 $N(t)$ 次到达，则 $[0,t]$ 内到达的旅客数为

$$M(t)=\sum_{j=1}^{N(t)}Z_j \tag{7.1}$$

为**复合泊松过程**. $E[M(t)]$ 是 $[0,t]$ 内平均到达的旅客数，$\mathrm{Var}[M(t)]$ 是 $[0,t]$ 内到达的旅客数的方差.

已知 $N(t)=n$ 时，$M(t)$ 有条件数学期望

$$E[M(t)|N(t)=n]=E[\sum_{j=1}^{n}Z_j|N(t)=n]=E[\sum_{j=1}^{n}Z_j]=nE[Z_j]=n\mu.$$

于是得到 $E[M(t)|N(t)]=N(t)\mu$. 再求数学期望得到

$$E[M(t)|N(t)=n]=E[\sum_{j=1}^{n}Z_j|N(t)=n]=E[N(t)\mu]=\lambda t\mu.$$

于是得到 $E[M(t)|N(t)]=N(t)\mu$. 再求数学期望得到

$$E[M(t)]=E[E[M(t)|N(t)]]=E[N(t)]\mu=\lambda t\mu.$$

$M(t)^2$ 有条件数学期望

$$\begin{aligned}E[M^2(t)|N(t)=n]&=E[(\sum_{j=1}^{n}Z_j)^2|N(t)=n]=E[(\sum_{j=1}^{n}Z_j)^2]\\&=\mathrm{Var}[\sum_{j=1}^{n}Z_j]+(E[\sum_{j=1}^{n}Z_j])^2\\&=n\sigma^2+(n\mu)^2.\end{aligned}$$

所以有

$$E[M^2(t)|N(t)]=N(t)\sigma^2+N^2(t)\mu^2.$$

两边再求数学期望，利用 $E[N(t)] = \mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t$，$E[N^2(t)] = \lambda t + (\lambda t)^2$，我们有

$$E[M^2(t)] = E[N(t)]\sigma^2 + E[N^2(t)]\mu^2 = \lambda t\sigma^2 + [\lambda t + (\lambda t)^2]\mu^2.$$

最后得到

$$\mathrm{Var}[M(t)] = E[M^2(t)] - (E[M(t)])^2 = \lambda t\sigma^2 + \lambda t\mu^2.$$

定理 7.2

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，$\{Z_j\}$ 是相互独立的随机序列，有共同的数学期望 $\mu = E[Z_j]$ 和方差 $\sigma^2 = \mathrm{Var}[Z_j]$，并且和 $\{N(t)\}$ 独立，复合泊松过程 $\{M(t)\}$ 由 (7.1) 定义，则

(1) $E[M(t)] = \lambda t\mu$；

(2) 当 $\sigma^2 < \infty$ 时，$\mathrm{Var}[M(t)] = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2)$.

例 7.3

假定在股票交易市场，股票交易次数是以 λ 为速率的泊松过程．记第 k 次与第 $k-1$ 次易手前后股票价格的变化为 Y_k．不妨假定 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量且与 $N(t)$ 独立，而 $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ 则代表时刻 t 时股票的总价格变化．设 Y_1 的分布为 $G(y)$，则

$$P(Y_1 + Y_2 \le y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(y-z)dG(z),$$

称为 G 与 G 自身的卷积，记为 $G * G(y)$ 或 $G^{(2)}(y)$．类似地，$G^{(n)}(y) = G * \cdots * G(y)$，称为 G 自身的 n 重卷积．有了上面的记号，我们不难求出 $X(t)$ 的分布：

$$\begin{aligned}
P(X(t) \le x) &= P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le x | N(t) = n) P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le x) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} G^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

例 7.4:（例 7.1 续）

假设各次磨损量和撞击次数相互独立，并且每次磨损量是参数为 $\beta > 0$ 的指数随机变量．根据零件设计标准，如果磨损总量大于 $\alpha > 0$，那么需要更换零件；否则影响安全运行，求该零件的平均寿命．

解．令 η 为零件的寿命，它是随机变量．对任意 $t > 0$，

$$\eta > t \Leftrightarrow Z(t) \le \alpha.$$

所以

$$P(\eta > t) = P(Z(t) \le \alpha).$$

由分部积分公式得

$$\begin{aligned} E\eta &= \int_0^\infty P(\eta > t)dt \\ &= \int_0^\infty P(Z(t) \le \alpha)dt \\ &= \int_0^\infty P(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \le \alpha)dt. \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{N} = (N(t), t \ge 0)$ 和 $(\xi_n, n \ge 1)$ 相互独立，根据全概率公式

$$P\big(\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i \le \alpha\big) = \sum_{n=0}^{\infty} P\big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \le \alpha\big) P(N(t) = n).$$

令

$$\tilde{N}(t) = \max\big\{n \ge 0 : \sum_{i=1}^{n} \xi_i \le t\big\},$$

$(\tilde{N}(t), t \ge 0)$ 是参数为 $\beta > 0$ 的泊松过程. 特别，

$$P(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \le \alpha) = P(\tilde{N}(\alpha) \ge n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta}.$$

我们有

$$\begin{aligned} E\eta &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \int_0^\infty \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} (k+1) \frac{\alpha^k \beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \\ &= \frac{1 + \alpha\beta}{\lambda}. \end{aligned}$$

□

7.2 条件 (混和) 泊松过程

令 $\{N(t), t \ge 0\}$ 是一个计数过程, 其如下定义. 设 L 是一个正值随机变量, 在 $L = \lambda$ 的条件下, $N(t)$ 是一个强度为 λ 的泊松过程. 这样的计数过程称为**条件（混和）泊松过程**.

假设 L 是密度函数为 g 的连续随机变量. 因为

$$\begin{aligned} P(N(t+s) - N(s) = n) &= \int_0^\infty P(N(t+s) - N(s) = n | L = \lambda) g(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} g(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

所以条件泊松过程有平稳增量. 然而因为每个区间事件发生数都同时受到 L 的影响, 所以条件泊松过程一般不具有独立增量.

我们可以计算在给定 $N(t)=n$ 时 L 的条件分布:

$$\begin{aligned}P(L\le x|N(t)=n)&=\frac{P(L\le x,N(t)=n)}{P(N(t)=n)}\\&=\frac{\int_0^\infty P(L\le x,N(t)=n|L=\lambda)g(\lambda)d\lambda}{P(N(t)=n)}\\&=\frac{\int_0^x P(N(t)=n|L=\lambda)g(\lambda)d\lambda}{P(N(t)=n)}\\&=\frac{\int_0^x e^{-\lambda t}(\lambda t)^n g(\lambda)d\lambda}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda t)^n g(\lambda)d\lambda}.\end{aligned}$$

于是给定 $N(t)=n$ 时, L 的条件密度函数是

$$f_{L|N(t)}(\lambda|n)=\frac{e^{-\lambda t}\lambda^n g(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda t)^n g(\lambda)d\lambda},\ \lambda\ge 0.$$

例 7.5

保险公司认为每个参保人都有各自的事故率, 而当时间以年为计量单位时, 具有事故率 λ 的参保人的索赔次数是一个强度为 λ 的过程分布. 每个参保人有一个固定的（未知）的事故率, 假设它是在 $(0,1)$ 上均匀分布. 已知一个参保人在前 t 年提出了 n 次索赔, 那么在该条件下到该参保人下一次索赔的时间间隔分布是什么？

证明. 设 T 到该参保人下一次索赔的时间间隔, 那么我们的目标是计算 $P(T>x|N(t)=n)$. 于是

$$\begin{aligned}P(T>x|N(t)=n)&=\int_0^\infty P(T>x|L=\lambda,N(t)=n)f_{L|N(t)}(\lambda|n)d\lambda\\&=\frac{\int_0^1 e^{-\lambda x}e^{-\lambda t}\lambda^n d\lambda}{\int_0^1 e^{-\lambda t}\lambda^n d\lambda}.\end{aligned}$$

□

7.3 非时齐泊松过程

定义 7.6

如果计数过程 $\{N(t)\}$ 满足条件：

(1) $N(0)=0$;

(2) **独立增量性**：$\{N(t)\}$ 是独立增量过程；

(3) **非齐普通性**：对任何 $t\ge 0$，当正数 $h\to 0$ 时，有

$$\begin{cases}P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda(t)h+o(h),\\P(N(t+h)-N(t)\ge 2)=o(h),\end{cases}$$

则称 $\{N(t)\}$ 是**非时齐泊松过程**，称 $\lambda(t)$ 是 $\{N(t)\}$ 的**强度函数**.

容易理解，当强度函数 $\lambda(t)$ 变化平缓时，在较小的时间段内可以用强度函数 $\lambda(t)$ 在这段时间的平均代替 $\lambda(t)$，从而在小时间段中，可视 $\{N(t)\}$ 为时齐的泊松过程. 例如对于较小的时间段 $(s,t]$ 中，可以将汽车流视为时齐的泊松流，这时的强度 λ 是源非时齐泊松过程的强度函数 $\lambda(t)$ 在 $(s,t]$ 上的平均：

$$\lambda=\frac{1}{t-s}\int_s^t\lambda(u)du.$$

定义

$$m(s,t] := \int_s^t \lambda(u)du.$$

其表示 $\lambda(t)$ 与时间起点 s 及终点 t 围成的图形的面积.

定理 7.7

设 $\{N(t)\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的泊松过程，则 $(s,t]$ 内发生的事件数 $N(s,t] = N(t) - N(s)$ 服从数学期望为 $m(s,t]$ 的泊松分布，即

$$P(N(s,t] = k) = \frac{(m(s,t])^k}{k!}\exp(-m(s,t]),\ k = 0,1,\cdots. \tag{7.2}$$

证明. 不妨假设 $s = 0$. 我们先来计算 $P_0(t) = P(N(t) = 0)$. 由定义我们有

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P(N(t) = -0, N(t+h) - N(t) = 0) \\ &= P_0(t)P(N(t+h) - N(t) = 0) \\ &= P_0(t)(1 - \lambda(t)h + o(h)). \end{aligned}$$

因此,

$$P_0(t+h) - P_0(t) = -\lambda(t)hP_0(t) + o(h).$$

上式两边同时除以 h, 并且令 $h \to 0$, 得到

$$P_0'(t) = -\lambda(t)P_0(t).$$

因此

$$\int_0^t \frac{P_0'(s)}{P_0(s)}ds = -\int_0^t \lambda(s)ds.$$

从而

$$\ln(P_0(t)) - \ln(P_0(0)) = -\int_0^t \lambda(s)ds.$$

利用 $P_0(0) = 1$ 可得

$$P_0(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} = e^{-m(t)}.$$

类似地可以计算 $P_k(t) = P(N(t) = k)$. 由假设 (2) 和 (3) 得

$$P_k'(t) = -\lambda(t)P_k(t) + \lambda(t)P_{k-1}(t).$$

利用归纳法求解上述非齐次常微分，得

$$P_k(t) = \frac{(m(t))^k}{k!}e^{-m(t)}.$$

定理证毕. □

设泊松过程 $\{N(t)\}$ 有强度函数 $\lambda(t)$. 对 $a > 0$，在时刻 a 重新计数时，得到的计数过程为

$$\tilde{N}(t) = N(t+a) - N(a),\ t \geq 0. \tag{7.3}$$

定理 7.8

设非时齐泊松过程 $\{N(t)\}$ 有强度函数 $\lambda(t)$. 对 $a>0$，计数过程 (7.3) 是非时齐泊松过程，有强度函数 $\tilde{\lambda}(t)=\lambda(t+a)$.

证明. 容易看出定义 7.6 的条件 (1) 和 (2) 成立. 下面验证 (3).

$$\begin{aligned}
P(\tilde{N}(t+h)-\tilde{N}(t)=1) &= P(N(t+h+a)-N(t+a)=1)\\
&= \lambda(t+a)h+o(h),\\
P(\tilde{N}(t+h)-\tilde{N}(t)\geq 2) &= P(N(t+h+a)-N(t+a)\geq 2)\\
&= o(h).
\end{aligned}$$

□

命题 7.9

设非时齐泊松过程 $\{N(t)\}$ 有强度函数 $\lambda(t)$ 和 $m(t)=E[N(t)]>0$，用 S_1 表示第一个事件的发生时刻，则

(1) 已知 $N(t)=1$ 时，$g(s)=\lambda(s)/m(t),\ s\in[0,t]$，是 S_1 的概率密度函数;

(2) 当 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是来自总体密度为 $g(s)$ 的随机变量，次序统计量 $(Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(n)})$ 有联合密度

$$h(\boldsymbol{x})=\begin{cases} n!\prod_{j=1}^n g(x_j), & \text{当 } 0<x_1<x_2<\cdots<x_n<t,\\ 0, & \text{其他;}\end{cases}$$

(3) 已知 $N(t)=n$ 时，$[0,t]$ 内的依次到达时刻 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 与 $(Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(n)})$ 同分布.

定理 7.10

设 $\{N(t)\}$ 是一个强度函数为 $\lambda(t)$ 的非时齐泊松过程, 其中对任意 $t\geq 0$ 都有 $\lambda(t)>0$. 对任意 $t\geq 0$，令 $N^*(t)=N[m^{-1}(t)]$，则 $\{N^*(t)\}$ 是一个强度为 1 的泊松过程.

证明. 由于 $\lambda(t)>0$，我们知 $m(t)$ 是严格单调递增函数，所以它存在一个严格单调递增的反函数 $m^{-1}(t)$.

我们来验证 $N^*(t)=N[m^{-1}(t)]$ 是一个 Poisson 过程.

(1) $N^*(0)=N(m^{-1}(0))=N(0)=0$.

(2) 设 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，由单调性我们知 $0=m^{-1}(t_0)<m^{-1}(t_1)<\cdots<m^{-1}(t_n)$. 由 $\{N(t)\}$ 的独立增量性，我们知

$$N(m^{-1}(t_0)),N(m^{-1}(t_0),m^{-1}(t_1)],\cdots,N(m^{-1}(t_{n-1}),m^{-1}(t_n)]$$

相互独立. 于是 $N^*(t_0),N^*(t_1)-N^*(t_0),N^*(t_2)-N^*(t_1),\cdots,N^*(t_n)-N^*(t_{n-1})$ 相互独立.

(3) 对于 $s,t\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}
P(N^*(t+s)-N^*(s)=n) &= P(N(m^{-1}(t+s))-N(m^{-1}(s))=n)\\
&= p(N(m^{-1}(s),m^{-1}(t+s)])=n)\\
&= e^{-m(m^{-1}(t+s))+m(m^{-1}(s))}\frac{[m(m^{-1}(t+s))-m(m^{-1}(s))]^n}{n!}\\
&= \frac{e^{-t}t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

这里注意到 $m(m^{-1}(s), m^{-1}(t+s)] = m(0, m^{-1}(t+s)] - m(0, m^{-1}(s)] = m(m^{-1}(t+s)) - m(m^{-1}(s)) = t$. □

例 7.11

设某设备的使用期限是 10 年，在前 5 年里它平均 2.5 年需要维修一次，后 5 年平均 2 年需维修一次. 试求它在使用期内只维修过一次的概率.

解. 用非齐次泊松过程来描述故障发生所对应的计数过程，则强度函数为

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{2.5}, & 0 \le t \le 5, \\ \frac{1}{2}, & 5 < t < 10. \end{cases}$$

于是由

$$m(10) = \int_0^{10} \lambda(t)dt = 4.5,$$

我们有

$$P(N(10) - N(0) = 1) = e^{-4.5}\frac{(4.5)^1}{1!} = \frac{9}{2}e^{-\frac{9}{2}}.$$ □

7.4 例题

例 7.12

某患者具有间歇神经痛，一般情况下不需要服用药物镇痛；但有时痛得厉害，需要服用药物止痛. 据观察记录，该患者 $(0, t]$ 内出现神经痛的次数 $N(t)$ 构成一个泊松过程，平均次数为 λ. 另外，假设患者在 t 时刻出现的神经痛需要服用的药物的概率为 $p(t)$ (依赖于 t). 令 $t > 0$，$\tilde{N}(t)$ 表示 $(0, t]$ 内服用的药物的次数，求 $\tilde{N}(t)$ 的分布.

解. 假设 $N(t) = n$，并且出现神经痛的时刻为 $S_1 = s_1, S_2 = s_2, \cdots, S_n = s_n$. 由于是否服药相互独立，所以在此条件下我们有 $\tilde{N}(t) = k$ (其中 $k \le n$) 的概率为

$$F_{n,k}(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \prod_{i=1}^{k} p(S_{i_1}) \prod_{j \ne i_1, \cdots, i_k} [1 - p(S_j)].$$

因此，利用全概率公式得

$$\begin{aligned} P(\tilde{N}(t) = k) = & \sum_{n=k}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t P(\tilde{N}(t) = k | S_1 = s_1, S_2 = s_2, \cdots, S_n = s_n, N(t) = n) \\ & f_{S_1, \cdots, S_n}(s_1, \cdots, s_n | N(t) = n) ds_1 \cdots ds_n P(N(t) = n) \\ = & \sum_{n=k}^{\infty} (\int_0^t \cdots \int_0^t F_{n,k}(s_1, s_2, \cdots, s_n) f_{S_1, \cdots, S_n}(s_1, \cdots, s_n | N(t) = n) ds_1 \cdots ds_n) P(N(t) = n) \\ = & \sum_{n=k}^{\infty} E(f(S_1, S_2, \cdots, S_n) | N(t) = n) P(N(t) = n). \end{aligned}$$

注意到函数 f 关于 n 个变量对称，所以由命题 2.31 我们有

$$\begin{aligned} E(F(S_1, \cdots, S_n) | N(t) = n) &= EF(U_{(1)}, U_{(2)}, \cdots, U_{(n)}) \\ &= Ef(U_1, U_2, \cdots, U_n), \end{aligned}$$

其中 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 为独立同分布均匀随机变量. 不难计算

$$EF(U_1,U_2,\cdots,U_n)=\binom{n}{k}\frac{1}{t^n}[\int_0^t p(u)du]^k[t-\int_0^t p(u)du]^{n-k}.$$

于是

$$\begin{aligned}P(\tilde{N}(t)=k)&=\sum_{n=k}^{\infty}EF(U_1,\cdots,U_n)P(N(t)=n)\\&=\frac{(\lambda\int_0^t p(u)du)^k}{k!}e^{-\lambda\int_0^t p(u)du}.\end{aligned}$$

□

7.5 习题

习题 7.1

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，T 是和该泊松过程独立的随机变量. 当 T 服从参数为 β 的指数分布时，

(1) 求 $N(T)$ 的概率分布；

(2) 计算 $E[N(T)]$.

习题 7.2

对一个条件泊松过程, 求它的均值函数与方差函数.

习题 7.3

从 $t=0$ 开始，汽车按强度 λ 的泊松流驶入京沪高速路，车速是独立同分布的随机变量，有共同的分布函数 G. 在时刻 t，用 X 表示从北京驶往上海且位于公路段 $[a,b]$ 的汽车数，计算 X 的概率分布.

习题 7.4

某大型购物娱乐中心附近配有停车场. 假设进入停车场的车流量 $\mathbf{N}=(N(t),\ t\geq 0)$ 是参数为 $\lambda>0$ 的齐次泊松过程, 每位顾客的娱乐时间是相互独立的, 具有相同分布 $G(t)$ 的随机变量, 并且假设与 $\mathbf{N}$ 相互独立. 令 $t>0$, 以 $\tilde{N}(t)$ 表示 $(0,t]$ 内从出口开出停车场的车流量, 求 $\tilde{N}(t)$ 的分布 (假设停车场容量足够大).

习题 7.5

令 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立的正值随机变量, 并具有共同的密度函数 f, 假设这个序列一个均值为 λ 的泊松随机变量 M 独立. 定义

$$N(t)=\#\{i\leq N:X_i\leq t\},$$

其中 $\#A$ 表示集合 A 的元素个数. 证明 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是一个以 $\lambda(t)=\lambda f(t)$ 为强度函数的非时齐泊松过程.

第 8 讲　第一部分总结：概率论基础, 随机过程简介与泊松过程

8.1　课程第一部分总结

一. 概率论回顾

掌握好概率论的基本知识. (难点: 条件期望)

二. 随机过程简介

随机过程的定义, 随机过程的有限维分布, 随机过程的数字特征, 独立增量性与平稳增量性.

三. 泊松过程 (重点: 基本性质与综合应用)

1. 泊松过程的等价定义. (难点: 到达时刻的条件分布)
2. 年龄与寿命.
3. 汇合与分流.
4. 复合泊松过程.
5. 非时齐泊松过程.

8.2　例子

例 8.1

假设在每个时间段内, 我们必须选择服用 n 种药物中的一种, 药物 i 有效的概率 p_i 未知, $i, \cdots, n$. 假设我们可以立即知道服用的药物是否有效. 如果一种药物的有效概率等于 $\max_i p_i$, 则它是最佳的, 否则不是最佳的. 我们的目标是找到一个决定在每个时间段内服用哪种药物的策略, 以便服用非最佳药物的长程时间比例等于 0.

解. 以下策略可以实现这个目标. 假定在前 $k-1$ 个时间段内, 服用药物 i $(i=1,\cdots,n)$ 的结果为 $s_i(k)$ 次有效, 其中 $\sum_i(s_i(k)+f_i(k))=k-1$. 设下一次选择以概率 $1/k$ 为 "随机选择", 以概率 $1-1/k$ 为 "非随机选择". 如果是随机选择, 则在下一个时间段内服用的药物等可能地是 n 种药物中的任意一种; 如果是非随机选择, 则令在下一时间段内服用的药物是对应值 $\dfrac{s_i(k)}{s_i(k)+f_i(k)}$ 值最大的药物 (如果有多个 i 同时取到最大值, 则在这些 i 随机取一种). 下面我们来证明该策略满足要求.

由 Borel-Cantelli 引理 (定理 1.9) (2), 随机选择的次数是无限的概率是 1. 由于每次随机选择等可能地从 n 种药物种选一种, 再利用 Borel-Cantelli 引理 (2), 我们知每种药品无限次被选择的概率为 1. 因此, 根据强大数律, 以概率 1 有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{s_i(k)}{s_i(k)+f_i(k)}=p_i,\ \ i=1,\cdots,n.$$

所以，在一段有限的事件后, 非随机选择的一定是最佳药物.

下面我们来证明随机选择的长程比例等于 0 的概率为 1. 我们可以通过这个方式来进行选择: 设 U_k $(k\geq 1)$ 为在 $(0,1)$ 上均匀分布的独立随机变量, 如果 $U_k\leq 1/k$, 则第 k 个时间段 k 的选取是随机的. 记

$I\{A\}$ 为事件 A 的指示函数. 对于任意的 m, 我们有

$$
\begin{aligned}
\text{随机选择的比例} &= \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{r} I\{U_k \leq I_k\}}{r} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{k=m}^{m+r-1} I\{U_k \leq 1/k\}}{r} \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{k=m}^{m+r-1} I\{U_k \leq 1/m\}}{r} \\
&= 1/m.
\end{aligned}
$$

最后一个等式得自强大数定律, 因为 $I\{U_k \leq 1/m\}(k \geq m)$ 是均值为 $1/m$ 的独立同分布的伯努利随机变量. 从而我们知选择最佳药物的长程比例为 1. □

例 8.2

设随机过程 $Z(t) = X\sin t + Y\cos t$, 其中 X 和 Y 是相互独立的二元随机变量, 他们都分别以 $2/3$ 和 $1/3$ 的概率取值 -1 和 -2.

1. 求 $Z(t)$ 的均值函数和自相关函数;
2. $Z(t)$ 是否为宽平稳过程, 是否为严平稳过程?

证明. 1. 首先, 我们有 $E[X] = E[Y] = 0$, $E[X^2] = E[Y^2] = 2$, 以及 $E[XY] = 0$. 有均值函数和自相关函数的定义我们有

$$
\begin{aligned}
\mu_Z(t) &= E[X\sin t + Y\cos t] \\
&= E[X]\sin t + E[Y]\cos t \\
&= 0, \\
r_X(t_1, t_2) &= E[(X\sin t_1 + Y\cos t_1)(X\sin t_2 + Y\cos t_2)] \\
&= E[X^2]\sin t_1 \sin t_2 + E[XY](\sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2) + E[Y^2]\cos t_1 \cos t_2 \\
&= 2\cos(t_1 - t_2).
\end{aligned}
$$

2. 由上一问我们知 $Z(t)$ 是宽平稳过程. 我们有

$$
\begin{aligned}
E[Z^3(t)] &= E[(X\sin t + Y\cos t)^3] \\
&= E[X^3]\sin^3 t + 3E[X^2Y]\sin^2 t\cos t + 3E[XY^2]\sin t\cos^2 t + E[Y^3]\cos^3 t,
\end{aligned}
$$

其中 $E[X^3] = E[Y^3] = 2$, $E[X^2Y] = E[XY^2] = 0$. 代入上式我们可得

$$
E[Z^3(t)] = 2(\sin^3 t + \cos^3 t),
$$

于是 $Z(t)$ 不是严平稳过程. □

例 8.3

如果 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是独立同分布的随机变量，定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$，证明 $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 是平稳独立增量过程.

证明. (1) 先证对任意给定的 k 个时刻 $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，随机变量 $X_{n_2} - X_{n_1}, X_{n_3} - X_{n_2}, \cdots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$ 相互独立. 事实上，由于 $Z_0, Z_1, \cdots$ 是相互独立的随机变量，所以

$$X_{n_{i+1}} - X_{n_i} = \sum_{l=n_i+1}^{n_{i+1}} Z_i,\ i = 1, 2, \cdots$$

也相互独立.

(2) 再证 $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 有平稳增量，即证明对任意给定的两个时刻 $0 \le n_1 < n_2$ 以及整数 $l > 0$，随机变量 $X_{n_1+l} - X_{n_1}$ 与 $X_{n_2+l} - X_{n_2}$ 有相同分布. 由 $Z_0, Z_1, \cdots$ 同分布知它们有相同的特征函数，记为 $\phi_{Z_1}(t)$. 再由 $Z_0, Z_1, \cdots$ 的独立性，我们有

$$X_{n_1+l} - X_{n_1} = \sum_{l=n_1+1}^{n_1+l} Z_l \text{ 与 } X_{n_2+l} - X_{n_2} = \sum_{l=n_2+1}^{n_2+l} Z_l$$

有相同的特征函数 $[\phi_Z(u)]^l$，利用随机变量特征函数唯一确定其分布的性质，我们知 $X_{n_1+l} - X_{n_1}$ 与 $X_{n_2+l} - X_{n_2}$ 有相同分布.

综上，$\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ 是平稳独立增量过程. □

例 8.4

设 $\{N(t)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，T 是和该泊松过程独立的随机变量. 当 T 服从参数为 β 的指数分布时，

(1) 求 $N(T)$ 的概率分布；

(2) 计算 $E[N(T)]$.

解. (1) 由全概率公式我们有

$$\begin{aligned}
P(N(T) = n) &= \int_0^{+\infty} P(N(t) = n | T = t) f_T(t) dt \\
&= \int_0^{+\infty} P(N(t) = n) \beta e^{-\beta t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \beta e^{-\beta t} dt \\
&= \frac{\beta}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\beta)t} (\lambda t)^n dt. \\
&= \frac{\lambda^n \beta}{(\lambda + \beta)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

(2) $E[N(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(N(T) = n) = \frac{\beta}{\lambda+\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} n(\frac{\lambda}{\lambda+\beta})^n = \lambda/\beta.$ □

例 8.5

人造卫星按照强度为 λ 的泊松流路过靶场上空. 如果试射一枚导弹需要的时间为 s, 计算在时刻 t 发射的导弹不被卫星监测的概率.

解. 由题意，人造卫星路过靶场上空的过程是一个泊松过程，记第 n 次到达的时间为 S_n. 时刻 t 之后第一次有卫星路过的时刻为 $S_{N(t)+1}$. 记 $R(t) = S_{N(t)+1} - t$，则 $R(t) \sim \mathcal{E}(\lambda)$. 在时刻 t 发射的导弹不被卫星监测当且仅当 $R(t) > s$. 于是我们知在时刻 T 发射的导弹不被卫星监测的概率为

$$P(R(t) > s) = e^{-\lambda s}.$$

□

例 8.6

一个二维 Poisson 过程是一个在平面上随机发生的事件的过程，它满足

(1) 对于面积为 A 的任何区域，在这个区域中的事件个数具有均值为 λA 的 Poisson 分布.

(2) 在不相交的区域中的事件个数是独立的.

对于这样的过程，考察平面中的一个任意的点，而以 X 记它到最近的事件的（欧式）距离. 证明：

(1) $P\{X > t\} = e^{-\lambda\pi t^2}$,

(2) $E[X] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$.

证明. (1) 以 N_t 表示在以该点为中心，半径为 r 的圆中发生的事件数，则 N_t 服从参数为 $\lambda\pi t^2$ 的 Poisson 分布

$$P\{X > t\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda\pi t^2}.$$

(2) $E[X] = \int_0^\infty P\{X > t\}dt = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$. □

例 8.7

某商品每件附赠一张奖券, 奖券有 m 种不同类型. 独立于过去收集的奖券, 某人每次以概率 p_j ($\sum_{i=1}^m p_j = 1$) 收集一张类型 j 的奖券. 以 N 记他为了收集齐全套奖券购买的商品件数. 求 $E[N]$.

解. 如果我们令 N_j 表示为收集到类型 j 所需购买的商品数, 那么

$$N = \max_{1\le j\le m} N_j.$$

我们知道每个 N_j 分别是以 p_j 为参数的几何随机变量, 但它们并不是独立的, 之间的关系比较复杂, 所以上式虽然给出了 N 的几个具体表达, 但似乎并不容易直接应用.

为此, 我们将问题作一个转化. 我们假设奖券收集的时间是按速率为 1 的泊松过程选取的. 如果某时刻得到了类型 j 的奖券, 我们就称该时刻发生了一个类型为 j 的事件 ($1 \le j \le m$). 现在我们令 $N_j(t)$ 表示到时刻 t 为止收集到的类型 j 的奖券数, 那么 $\{N_j(t), t \ge 0\}$ ($j = 1, \cdots, m$) 是强度为 $\lambda p_j = p_j$ 的相互独立的泊松过程. 令 X_j 表示第 j 个过程的首个事件发生的时间, 并且令

$$X = \max_{1\le j\le m} X_j$$

表示收集到全套收藏的时间. 因为 X_j 是速率为 p_j 的相互独立的指数随机变量, 所以

$$\begin{aligned}
P(X \le t) &= P(\max_{1\le j\le m} X_j < t) \\
&= P(X_j < t, \text{ 对任意 } j = 1, \cdots, m\} \\
&= \prod_{j=1}^m (1 - e^{-p_j t}).
\end{aligned}$$

因此

$$E[X] = \int_0^\infty P(X > t)dt = \int_0^\infty \{1 - \prod_{j=1}^m (1 - e^{-p_j t})\}dt.$$

下面我们要做的是建立 $E[X]$ 和 $E[N]$ 之间的联系. 记 T_i 为奖券计数所对应的泊松过程的第 i 个到达时间间隔. 不难看出

$$X = \sum_{i=1}^{N} T_i.$$

因为 T_i 是参数为 1 的相互独立的指数随机变量, 而 N 与 T_i 独立, 所以

$$E[X|N] = NE[T_i] = N.$$

因此

$$E[N] = E[X] = \int_0^\infty P(X > t)dt = \int_0^\infty \{1 - \prod_{j=1}^{m}(1 - e^{-p_j t})\}dt. \qquad \square$$

例 8.8: 阿里巴巴全球数学竞赛 2022 年预赛试题

第4,5题（单选题）“虎虎生威”盲盒

春节期间，“勇敢牛牛”牛奶公司推出了新春集福活动：每盒牛奶都附赠一个红包，红包中藏有下列“虎”，“生”，“威”中的一款图案。（如下图）

集齐两个“虎”，一个“生”，一个“威”即可拼齐成为“虎虎生威”全家福。这项活动一经推出，就成为了网红爆款，很多人希望能够集齐一整套。假设红包中的图案是独立随机分布的（并且不能从红包外观上进行区别），“虎”，“生”，“威”三款红包按均匀概率$\frac{1}{3}$分布。

(1) 收集齐一整套“虎虎生威”全家福所需要购买的牛奶盒数的数学期望是多少？

(A) $6\frac{1}{3}$;

(B) $7\frac{1}{3}$;

(C) $8\frac{1}{3}$;

(D) $9\frac{1}{3}$;

(E) 以上都不对。

(2) 在市场部的周会讨论中，大家认为当前的图案投放比例，会导致在收集“虎虎生威”全家福时收集到太多的“生”和“威”，于是探讨可能的改进方案。记图案“虎”、“生”和“威”的投放比例为(p, q, r)，那么下面哪种方案下，收集齐一整套“虎虎生威”全家福所需要购买的牛奶盒数的数学期望是最小的？

(A) $(p, q, r) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;

(B) $(p, q, r) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$;

(C) $(p, q, r) = (\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10})$;

(D) $(p, q, r) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$.

证明. 本例是上例的一个推广. 我们可以将一般问题描述如下: 假设盲盒有 n 种款式, 以及最终目标是对于每种款式 i 需要收集 k_i 个. 记首次达成目标时购买的盲盒数量是 N, 我们的目标是计算 $E[N]$. 我们将这个过程嵌入到泊松过程中: 假设有一个参数为 1 的泊松过程, 每次该过程对应的事件发生时, 就独立地

按照概率 p_i 抽取款式. 记

$$T_i = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \text{在时间 } t \text{ 收集到了} k_i \text{ 个款式 } i\}$$
$$T = \max_{1\le i\le n} T_i.$$

和上例证明类似, 我们有 $E[T] = E[N]$. 我们和上例类似可以算得

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^\infty P[T > t]dt \\ &= \int_0^\infty (1 - P[T \le t])dt \\ &= \int_0^\infty (1 - P[T_i \le t,\ \forall 1 \le i \le n])dt \\ &= \int_0^\infty (1 - \prod_{i=1}^n (1 - \sum_{k=0}^{k_i-1} e^{-p_i t}\frac{(p_i t)^k}{k!}))dt. \end{aligned}$$

(1) 在本题中, $n = 3$, 目标收集 $(k_1, k_2, k_3) = (2, 1, 1)$. 我们可以计算得到解析表达式

$$E[N] = 1 + p_1 + (\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}) - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1-p_i} - \frac{p_1}{(p_1+p_2)^2} - \frac{p_1}{(p_1+p_3)^2}.$$

将 $(p_1, p_2, p_3) = (1/3, 1/3.1/3)$ 带入我们可以得到期望为 $7\frac{1}{3}$, 所以答案选 B.

(2) 上一问中我们已经算得方案 A 的期望是 $7\frac{1}{3}$. D 显然不是一个好方案, 因为收集到 "威" 字图案的期望是 8, 已经超过了方案 A. 所以核心在于考虑方案 B, C. 利用 (1) 中得到的公式可以计算出 B, C 方案对应的期望分别为 $7\frac{1}{18}$ 和 $6\frac{233}{245}$. 所以方案 C 是最佳的. □

例 8.9

设 $\{N(t)\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程，$X_1, X_2, \cdots$ 是事件之间的间隔时间，问：

(1) 诸 X_i 是否独立？

(2) 诸 X_i 是否同分布？

证明. 记 $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$，则对任意 $t_1, t_2 > 0$，有

(1) 由于

$$\begin{aligned} P(X_2 > t_2|X_1 = t_1) &= P(N(t_1+t_2) - N(t_1) = 0|X_1 = t_1) \\ &= P(N(t_1+t_2) - N(t_1) = 0) \\ &= e^{-[m(t_1+t_2)-m(t_1)]} \end{aligned}$$

与 X_1 的取值 t_1 有关，所以 X_2 与 X_1 不独立，从而 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 不独立.

(2) 因为 $P(X_1 > t_1) = e^{-m(t_1)}$，而 $P(X_2 > t_2) = \int_0^\infty e^{-m(t_1+t_2)}m(t_1)dt_1$. 所以 X_1 和 X_2 不同分布. □

8.3 习题

习题 8.1

假设关于您想出售的物品的非负出价以速率为 λ 的 Poisson 过程到达. 假定每次出价值是一个随机变量，其具有密度函数 $f(x)$. 一旦收到出价，您必须即时决定接受出价或拒绝并等待下一个出价. 假设部件卖出以前，你需要承担平均每单位时间 c 的成本. 而您的目标是使期望的总收入最大，其中总收入等于物品出售的价格减去总成本. 假设您使用的策略是，接受第一个超过某个特定值 y 的出价. 问 y 的最优值是多少？

习题 8.2

一个自由职业者每完成一个订单可以获得 R 个单位收入. 我们假设订单到达服从强度为 λ 的泊松分布. 同时假设生活成本是单位时间 1 个单位支出. 如果该商人的起始财富为 $S > 0$, 问他最后破产的概率是多少？

习题 8.3

从 $t = 0$ 开始，汽车按强度 λ 的泊松流驶入京沪高速路，车速是独立同分布的随机变量，有共同的分布函数 G. 在时刻 t，用 X 表示从北京驶往上海且位于公路段 $[a, b]$ 的汽车数，计算 X 的概率分布.

第 9 讲　更新过程

当计数过程 $\{N(t)\}$ 的等待间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量时，$\{N(t)\}$ 时泊松过程. 在实际问题中，还有很多计数过程，其等待间隔是独立同分布的随机变量，但并不服从指数分布，人们称这样的过程为**更新过程**，称等待间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 为**更新间隔**.

9.1　更新过程

设 X 是是非负随机变量，如无特别说明一般我们要求 $P(X<\infty)=1$，即间隔时间有限，但有时一些结论也可推广到间隔时间可能无限的情形. 来自总体 X 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的第 $1, 2, \cdots$ 个更新间隔. 定义

$$S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n,\ n \geq 1.$$

S_n 是第 n 个更新发生的时刻. 根据计数过程和到达时间的关系，我们有

$$\{N(t) < n\} = \{S_n > t\},\ \{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}.$$

注意

$$N(t) = \#\{n | S_n \leq t, n \geq 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} I[S_n \leq t],\ t \in [0, \infty),$$

其中 $\#A$ 表示集合 A 中的元素个数，$I[A]$ 是 A 的示性函数.

习题 9.1

指出以下哪些等式成立，对于不成立的举出反例：

(1) $\{N(t) < n\} = \{S_n > t\}$；

(2) $\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$；

(3) $\{N(t) > n\} = \{S_n < t\}$；

(4) $\{N(t) \leq n\} = \{S_n \geq t\}$.

以下总约定更新间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 是来自总体 X 的随机变量，

$$F(x) = P(X \leq x),\ \mu = E[X] > 0$$

分别是总体 X 的分布函数和数学期望. 在讨论更新过程时，如无特别说明，所提到的随机变量都是非负的.

9.2　更新过程的极限定理

由于 $N(t)$ 是 $[0, t]$ 中的更新次数，所以对于充分大的 t，$t/N(t)$ 近似等于 $[0, t]$ 中的平均等待间隔 μ. 当 $t \to \infty$ 时，直观上应该有 $t/N(t) \to \mu$，从而得到

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \quad a.s.. \tag{9.1}$$

为了数学上证明 (9.1), 先做一些必要的准备.

由强大数律，当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \quad a.s.,$$

所以有

$$S_n \to \infty \quad a.s..$$

更新过程 $N(t)$ 是计数过程，所以是 t 的单调不减函数. 当 $t \to \infty$ 时，$N(t)$ 的极限等于它的子序列 $N(S_n)$ 的极限，于是

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{n\to\infty} N(S_n) \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty \ a.s..$$

上式说明更新次数随着时间的延长而无限的增加. 以后把上式记成 $N(\infty) = \infty$ a.s..

注意到 $S_{N(t)}$ 是 $[0,t]$ 内的最后一次更新时刻，$S_{N(t)+1}$ 是 (t,∞) 中的第一个更新时刻，所以有

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}.$$

于是得到

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}.$$

令 $t \to \infty$，我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \ a.s.,$$

于是 (9.1) 成立. 所以我们有

定理 9.1

设更新间隔 $X_1, X_2, \cdots$ 有数学期望 $\mu > 0$，则当 $t \to \infty$ 时，$N(t)/t \to 1/\mu$ a.s..

注记 9.2

如果 $\mu = \infty$，同样的推导可知上面结论也成立，即当 $t \to \infty$ 时，$N(t)/t \to 0$ a.s.. 此时我们可以采用截断的方法：对固定的 $c > 0$，记 $X_n^c = 1_{\{X_n \leq c\}} X_n = \min\{X_n, c\}$，$n = 1, 2, \cdots$. 注意到 $\mu^c = E[X_n^c] \leq c < \infty$，且由单调收敛定理知当 $c \to \infty$ 时，$\mu^c \uparrow \infty$. 设 $\epsilon > 0$, 取 $c > 0$ 充分大使得 $1/\mu^c < \epsilon$. 注意到

$$X_n^c \leq X_n, \ n = 1, 2, \cdots.$$

于是 $S_n^c = \sum_{i=1}^b X_i^c \leq S_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 进而 $N^c(t) = \max\{n : S_n^c \leq t\} \geq N(t)$, $t > 0$. 于是对任意 $t > 0$，有

$$0 \leq \frac{N(t)}{t} \leq \frac{N^c(t)}{t}.$$

由定理 9.1，我们知存在几乎必然地，存在 t 充分大，使得

$$\frac{N(t)}{t} \leq \frac{N^c(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu^c} + \epsilon < 2\epsilon \ a.s..$$

由 ϵ 的任意性我们知结论成立.

上面结果表明依概率 1，$N(t)$ 和 t/μ 是同阶无穷大，或者说在几乎必然的意义下，$N(t)$ 的发散速度是 t/μ. 数 $1/\mu$ 称为 **更新过程的速率**.

例 9.3

小明有一台使用单个电池的收音机. 一旦电池失效，小明立刻换上新电池. 如果电池的寿命 (单位：小时) 在区间 $(30, 60)$ 上均匀分布，那么小明以什么速率更换电池？

解. 如果我们用 $N(t)$ 表示到时间 t 为止失效的电池的个数，由定理 9.1，我们知小明更换电池的速率为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{45}.$$

即长远来看，小明必须每 45 小时更换一次电池. □

习题 9.2

在上例中，小明手头上没有多余的电池，每次失效发生时，她必须去购买新电池. 如果她去买新电池花费的时间在 $(0,1)$ 上均匀分布，那么小明更换电池的平均速率是什么？

定理 9.4

定义 $\lambda_t=t/\mu$，$\sigma_t=\sigma\sqrt{t/\mu^3}$. 如果 $\sigma^2=\mathrm{Var}(X)\in(0,\infty)$，则对任何实数 x，

$$\lim_{t\to\infty}P(\frac{N(t)-\lambda_t}{\sigma_t}\le x)=\Phi(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的分布函数.

证明. 记 $r_t=\lambda_t+x\sigma_t$，$n:=n(t)=[r_t]+1$，有

$$P(\frac{N(t)-\lambda_t}{\sigma_t}\le x)=P(N(t)\le r_t)=P(N(t)<n)=P(S_n>t)=P(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}>\frac{t-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}).$$

由定理 2.25 我们知只需再证明

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}=-x.$$

实际上，当 $t\to\infty$ 时，有

$$\tau_t\to\infty,\ |r_t-n|\le 1,\ \sigma_t/\lambda_t\to 0,\ \mu\sigma_t=\mu\sigma\sqrt{t/\mu^3}=\sigma\sqrt{\lambda_t},$$

于是

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}=\lim_{t\to\infty}=\lim_{t\to\infty}\frac{t-r_t\mu-(n-r_t)\mu}{\sigma\sqrt{n/r_t}\sqrt{r_t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t-r_t\mu}{\sigma\sqrt{r_t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-x\mu\sigma_t}{\sigma\sqrt{\lambda_t}}=-x.$$

从而得证. □

例 9.5

两台机器持续地处理无穷个灵活. 机器 1 处理一个零活的时间是参数为 $n=4$ 和 $\lambda=2$ 的伽马随机变量, 机器 2 处理一个零活的时间服从 $(0,4)$ 上的均匀分布. 近似计算到时刻 $t=100$ 为止, 两台机器一起至少可以处理 90 个零活的概率.

解. 如果我们令 $N_i(t)$ 为到时刻 t 为止机器 i 可以处理的零活数, 那么 $\{N_1(t),t\ge 0\}$ 与 $\{N_2(t),t\ge 0\}$ 是独立的更新过程. 第一个更新过程的更新间隔是参数为 $n=4$ 和 $\lambda=2$ 的伽马随机变量, 故其均值为 2, 方差为 1. 第一个更新过程的更新间隔服从 $(0,4)$ 上的均匀分布, 故其均值为 2, 方差为 4/3.

所以, $N_1(100)$ 近似地是均值为 50 和方差为 100/8 的正态随机变量, 而 $N_2(100)$ 近似地是均值为 50 和方差为 100/6 的正态随机变量. 因此, $N_1(100)+N_2(100)$ 近似地是均值为 100 和方差为 175/6 的正态

随机变量. 于是令 Φ 为标准正态分布函数, 我们有

$$\begin{aligned}P\{N_1(100)+N_2(100)>89.5\} &= P\Big\{\frac{N_1(100)+N_2(100)-100}{\sqrt{175/6}} > \frac{89.5-100}{\sqrt{175/6}}\Big\}\\ &\approx 1-\Phi(\frac{-10.5}{\sqrt{175/6}})\\ &\approx \Phi(\frac{10.5}{\sqrt{175/6}})\\ &\approx (1.944)\\ &\approx 0.9741.\end{aligned}$$

□

9.3 更新函数

对于更新过程 $\{N(t)\}$，在应用中我们自然关心数学期望 $E[N(t)]$，例如可以备足部件随时更新. 称 $[0,t]$ 中的平均更新次数

$$m(t)=E[N(t)],\ t\geq 0$$

为更新过程 $N(t)$ 的**更新函数**.

设更新间隔 $X_1,X_2,\cdots$ 的分布函数是 $F(t)=P(X_i\leq t)$，到达时刻 S_n 的分布函数是

$$F_n(t)=P(S_n\leq t).$$

对于 $n,m\geq t$，利用 S_n 和 $S_{n+m}-S_n$ 独立得到

$$F_{n+m}(t)=P(S_n+(S_{n+m}-S_n)\leq t)\leq P(S_n\leq t, S_{n+m}-S_n\leq t)=F_n(t)F_m(t).$$

这就得到对于任何 $m,k\geq 1$，

$$F_{mk}(t)\leq F_m(t)F_{m(k-1)}(t)\leq\cdots\leq [F_m(t)]^k,\ t\geq 0.$$

利用单调收敛定理我们有

$$m(t)=E[\sum_{n=1}^{\infty}I[S_n\leq t]]=\sum_{n=1}^{\infty}E[I[S_n\leq t]]=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t),\ t\geq 0.$$

注意到 $F_n(t)\leq F^n(t)$，我们有

$$m(t)\leq F(t)\sum_{n=1}^{\infty}[F(t)]^{n-1}=\frac{F(t)}{1-F(t)},\ t\geq 0.$$

于是如果更新间隔 X_i 是无界随机变量，即对所有的 $t<\infty$，$F(t)=P(X_i\leq t)<1$，则 $m(t)<\infty$ 总成立.

注意到 $S_n\to\infty$ a.s.，所以我们有

引理 9.6

对于确定的 t，总有 m 使得 $F_m(t)=P(S_m\leq t)<1$.

证明. 因为 $E[X]=\mu>0$，所以存在 $\epsilon>0$ 使得 $P(X>\epsilon)>0$. 于是对任意 n 有

$$P(S_n\leq n\epsilon)=1-P(S_n>n\epsilon)\leq 1-P(X_1>\epsilon)^n<1.$$

于是对于确定的 t，取 m 充分大使得 $t\leq m\epsilon$，从而 $F_m(t)=P(S_m\leq t)\leq P(S_m\leq m\epsilon)<1$. □

设 m 由如上引理给出，对任何正整数 n，存在整数 k,r 使得 $n=km+r$，$1\le r\le m$. 所以

$$F_{km+r}(t)\le F_{km}(t)F_r(t)\le [F_m(t)]^kF_r(t).$$

于是得到

$$\begin{aligned}m(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{m}F_{mk+r}(t)\\&\le\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{m}[F_m(t)]^kF_r(t)\\&=\frac{1}{1-F_m(t)}\sum_{r=1}^{m}F_r(t)<\infty.\end{aligned}$$

于是我们有

定理 9.7

对于 $t\ge 0$，$m(t)<\infty$.

注记 9.8

我们还可以用另外一种方法证明上面定理. 由马尔可夫不等式，我们有

$$P(S_n\le t)=P(e^{-S_n}\ge e^{-t})\le e^tE[e^{-S_n}].$$

由于 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同分布的，所以

$$E[e^{-S_n}]=E[e^{-\sum_{k=1}^{n}X_k}]=\prod_{k=1}^{n}E[e^{-X_k}]=\alpha^n,$$

其中 $\alpha=E[e^{-X_i}]<1$ (因为 $\mu=E[X_i]>0$，所以 $P(X_i=0)<1$). 从而

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\le t)\le e^t\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n<\infty.$$

例 9.9

一个容器内含有无限多硬币. 每个硬币有各自出现正面的概率，而这些概率是独立的 $(0,1)$ 均匀分布的随机变量的值. 假设我们按顺序投掷硬币，在任意时间或者掷一枚新的硬币，或者掷一个已经用过的硬币. 如果我们的目标是掷出正面的长程比例最大，问应该如何进行？

证明. 我们要展示一个策略，其结果使在长程中掷出正面的比例等于 1. 作为开始，以 $N(n)$ 记在前 n 次投掷中掷出反面的次数，所以正面的长程比例，记为 P_h，有

$$P_h=\lim_{n\to\infty}\frac{n-N(n)}{n}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}.$$

考虑如下策略：开始时选取一个硬币，连续地投掷它直至出现反面为止. 此时将此硬币抛弃 (不再用它) 并选取一个新的硬币. 这种过程就如此重复. 为了计算对于这个策略 P_h，注意，一个投掷的硬币出现反面更成了更新事件，因此由定理 9.1，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=1/E[\text{在相继的反面之间的投掷数}].$$

在给定投掷出正面的概率为 p 时，直至出现反面的投掷数是具有均值 $1/(1-p)$ 的几何随机变量. 因此，条件给出了

$$E[\text{在相继的反面之间的投掷数}] = \int_0^1 \frac{1}{1-p} dp = \infty,$$

上式蕴含了以概率 1 地有 $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = 0$. □

下面我们来看更新函数的更多性质.

定理 9.10

$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ 是单调不减的右连续函数.

证明. 首先，由 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ 以及 $F_n(t)$ 单调不减我们知 $m(t)$ 也单调不减. 对任意 $t \geq 0$，$\epsilon > 0$，由 $m(t) < \infty$ 我们知存在 M 使得

$$\sum_{n=M}^{\infty} F_n(t+1) \leq \epsilon.$$

分布函数 F_n 右连续，所以当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} m(t+1/n) &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{M} F_n(t+1/n) + \epsilon \\ &= \sum_{n=1}^{M} F_n(t) + \epsilon \leq m(t) + \epsilon.\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性以及 $m(t) \leq m(t+1/n)$ (因为) 我们知 $m(t+1/n) \to m(t)$. □

定理 9.11

当 $t \to \infty$ 时，$m(t) \to \infty$.

证明. 对于任意大的实数 M，由 $\lim_{t\to\infty} F_n(t) = 1$ 以及

$$\lim_{t\to\infty} m(t) \geq \lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^{M} F_n(t) = M$$

即有结论成立. □

定理 9.12

$m(0) = F(0)/[1 - F(0)]$.

证明. 由于更新间隔是非负的随机变量，所以

$$\begin{aligned}F_n(0) &= P(S_n = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0, \cdots, X_n = 0) \\ &= P(X = 0)^n = [F(0)]^n.\end{aligned}$$

从而

$$m(0) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} [F(0)]^n = \frac{F(0)}{1 - F(0)}.$$ □

9.4 更新流

类似于把泊松过程称为泊松流，在实际问题中，人们也称更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新时刻

$$S_0 = 0,\ S_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_j,\ j = 1, 2, \cdots$$

为**更新流**. 称事件按更新流 $\{S_j\}$ 发生，意指事件按更新过程 $\{N(t)\}$ 发生.

命题 9.13

用 $\{X_j\}$ 表示更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔. 如果 $\{N(t)\}$ 具有独立增量性和平稳增量性，且 $P(X_1 = 0) = 0$，则 $\{N(t)\}$ 是泊松过程.

证明. 只要证明 X_1 服从指数分布. 对于 $s, t > 0$，由

$$\begin{aligned}
P(X_1 > s + t | X_1 > s) &= P(N(s + t) = 0 | N(s) = 0) \\
&= P(N(s + t) - N(s) = 0 | N(s) = 0) \\
&= P(N(s, s + t] = 0) = P(N(t) = 0) \\
&= P(X_1 > t)
\end{aligned}$$

我们知 X_1 具有无记忆性，所以服从指数分布. □

例 9.14

单行道上汽车按更新流 $\{S_j\}$ 驶过，单位是秒. 如果行人横穿该公路需要 a 秒钟，计算在 $t = 0$ 时到达的行人平均等待多少时间才能横穿公路.

解. 用 Y 表示该行人的等待时间. 已知 $S_1 = s > a$ 时，$E[Y] = 0$. 已知 $S_1 = s \leq a$ 时，$E[Y] = 0$. 已知 $S_1 = s \leq a$ 时，第一辆车在 $S_1 = s$ 时刻驶过后，他白等了 s 秒，需要在 s 时重新开始等候. 这说明对 $s \leq a$，$Y | X_1 = s$ 和 $s + Y$ 同分布. 从上面的分析得到

$$Y | S_1 = s \text{ 和 } W = \begin{cases} 0, & s > a, \\ s + Y, & s \leq a \end{cases} \text{ 同分布.}$$

设 $F(x)$ 是 S_1 的分布函数，利用全概率公式我们有

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^\infty E[Y | S_1 = s] dF(s) \\
&= \int_0^a E[Y | S_1 = s] dF(s) + \int_{a+}^\infty E[Y | S_1 = s] dF(s) \\
&= \int_0^a E(s + Y) dF(s) + 0 \\
&= \int_0^a s dF(s) + F(a) E[Y],
\end{aligned}$$

其中 $\int_{a+}^\infty$ 表示 (a, ∞) 上的积分. 于是我们得到平均等候时间

$$E[Y] = \frac{1}{\overline{F}(a)} \int_0^a s dF(s) \text{ 秒.}$$

□

9.5 习题

习题 9.3

设更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔服从两点分布 $\mathcal{B}(1,p)$. 计算 $P(N(k)=j)$，并说明 $N(k)\ge k$.

习题 9.4

投掷一枚均匀的硬币, 直到连续出现两次正面, 称为一次更新. 连续不断地投掷该硬币, 到第 k 次投掷为止, 更新的次数记为 $N(k)$. 求更新的间隔时间 T 的分布和期望.

习题 9.5

令 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是更新过程，且假设对任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t>0$，在取条件于事件 $\{N(t)=n\}$ 时，事件的时刻 $S_1,\cdots,S_n$ 与独立的 $(0,t)$ 均匀随机变量的次序统计量有相同的分布. 证明 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是泊松过程.

习题 9.6

令 $\{N_1(t),t\ge 0\}$ 和 $\{N_2(t),t\ge 0\}$ 是独立的更新过程. 令 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$.

(1) $\{N(t),t\ge 0\}$ 是否为独立增量过程?

(2) $\{N(t),t\ge 0\}$ 是否为平稳增量过程?

(3) $\{N(t),t\ge 0\}$ 是否为更新过程?

第 10 讲　停时与更新定理

在上一讲中已经证明了结论

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\ a.s..$$

由于 $m(t)=E[N(t)]$，所以自然想到有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{E[N(t)]}{t}=\frac{1}{\mu}.$$

本讲我们的主要目标就是在数学上严格证明上式.

乍一看, 上式似乎是 (9.1) 的简单推论. 由于更新速率以概率 1 收敛到 $1/\mu$, 这不应该推出更新速率的期望收敛到 $1/\mu$ 吗? 然而, 我们必须小心, 为此考察以下的例子.

例 10.1

令 U 是在 (0.1) 上均匀分布的随机变量, 并且定义随机变量 $Y_n(n\geq 1)$ 为

$$Y_n=\begin{cases}0, & 若\ U>1/n,\\ n, & 若\ U\leq 1/n.\end{cases}$$

我们有当 $n\to\infty$ 时, 依概率 1 由 $Y_n\to 0$. 然而对任意 n 有

$$E[Y_n]=nP(U\leq\frac{1}{n})=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

所以, 虽然随机变量序列 $\{Y_n\}$ 收敛到 0, 但 Y_n 的期望值恒为 1.

10.1　停时

定义 10.2

设 $\{Y_n\}$ 是随机序列，T 是取正整数值的随机变量，如果对任何正整数 n，随机事件 $\{T\leq n\}$ 由 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 唯一决定，则称 T 是 $\{Y_n\}$ **的停时**.

由于

$$\{T=n\}=\{T\leq n\}-\{T\leq n-1\},$$

$$\{T>n\}=\Omega-\{T\leq n\}.$$

所以，只要 T 是 $\{Y_n\}$ 的停时，则 $\{T=n\}$ 和 $\{T>n\}$ 都可以由 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 唯一决定.

例 10.3

假设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，满足

$$P(X_i=1)=p=1-P(X_i=0)$$

其中 $p>0$. 若我们定义

$$N=\inf\{n:X_1+\cdots+X_n=r\},$$

其中我们记 $\inf\emptyset=+\infty$，则 N 是 $\{X_n\}$ 的停时.

定理 10.4: 瓦尔德定理

设随机变量 $Y_1, Y_2, \cdots$ 有相同的数学期望 μ，$\max_{1\le j\le\infty} E[|Y_j|] \le M$，$T$ 是取非负整数值的随机变量，$E[T] < \infty$，定义

$$S_T = \sum_{j=1}^{T} Y_j.$$

(1) 如果对于任何 j，$\{T \le j\}$ 和 Y_{j+1} 独立，则 $E[S_T] = \mu E[T]$；

(2) 如果 $\{Y_n\}$ 相互独立，T 是 $\{Y_n\}$ 的停时，则 $E[S_T] = \mu E[T]$.

证明. (1) 先设 $\{Y_j\}$ 是非负的随机序列. 用 $I[T \ge j]$ 表示事件 $\{T \ge j\}$ 的示性函数，则 $I[T \ge j] = 1 - I[T \le j-1]$ 与 Y_j 独立，且

$$S_T = \sum_{j=1}^{T} Y_j = \sum_{j=1}^{T} Y_j I[T \ge j] = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j I[T \ge j].$$

在上式两边求数学期望，利用单调收敛定理和定理 2.8，以及 $I[T \ge j]$ 与 Y_j 的独立性，我们有

$$E[S_T] = \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j] E[I[T \ge j]] \le \sum_{j=1}^{\infty} M P(T \ge j) = M E[T] < \infty.$$

对于一般的 $\{Y_j\}$，引入非负随机变量

$$Y_j^+ = (|Y_j| + Y_j)/2, Y_j^- = (|Y_j| - Y_j)/2,$$

则 $Y_j = Y_j^+ - Y_j^-$，我们有

$$S_T = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^+ I[T \ge j] = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^- I[T \ge j].$$

因为 $I[T \ge j]$ 与 Y_j^+, T_j^- 分别独立，$E[Y_j^+] + E[Y_j^-] = E[|Y_j|] \le M$，所以上面两个求和项的数学期望都有限. 于是

$$\begin{aligned} E[S_T] &= \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j^+] P(T \ge j) - \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j^-] P(T \ge j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E[Y_j^+ - Y_j^-] P(T \ge j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu P(T \ge j) \\ &= \mu E[T]. \end{aligned}$$

(2) 由停时的定义和 (1) 直接可得. □

例 10.5

令 $U_1, U_2, \cdots$ 是 $(0,1)$ 上的独立随机变量. 令

$$N = \min\{n : U_n > 0.8\},$$

$S = \sum_{i=1}^{N} U_i$. 我们用三种方法计算 $E[S]$.

- 以 U_1 的值为条件, 我们有

$$E[S] = \int_0^1 E[S|U_1 = x]dx = \int_0^{0.8} (x + E[S])dx + \int_{0.8}^1 xdx.$$

从而 $E[S] = 5/2$.

- 在 $N = n$ 的条件下, $U_1, \cdots, U_{n-1}$ 在 $(0, 0.8]$ 上均匀分布, U_n 在 $(0.8, 1)$ 上均匀分布, 所以

$$E[S|N = n] = 0.4(n - 1) + 0.9.$$

从而

$$E[S] = E[E[S|N]] = E[0.4(N - 1) + 0.9] = 2.5,$$

因为 N 服从参数 $1/5$ 的几何分布.

- 因为 N 是 $\{U_n\}$ 的一个停时, 所以我们有

$$E[S] = E[X]E[N] = 0.5 \cdot 5 = 2.5.$$

10.2 基本更新定理

命题 10.6

用 $S_{N(t)+1}$ 表示 t 以后的第一个更新时刻.

(1) 对于任何 t，$T = N(t) + 1$ 是 $X_1, X_2, \cdots$ 的停时；

(2) 当 $\mu = E[X_1] < \infty$ 时，有 $E[S_{N(t)+1}] = \mu(m(t) + 1)$；

(3) 如果 X_j 有界，$|X_j| \le M$，则 $m(t)/t \to 1/\mu$.

证明. (1) 对于任何 $n \ge 1$，事件

$$\{T \le n\} = \{N(t) < n\} = \{S_n > t\}$$

由 $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ 唯一决定，所以 T 是 $X_1, X_2, \cdots$ 的停时.

(2) 因为 $E[T] = m(t) + 1 < \infty$，$E[X_j] = \mu$，$S_{N(t)+1} = S_T$，应用瓦尔德定理我们有

$$E[S_{N(t)+1}] = \mu E[T] = \mu(m(t) + 1).$$

(3) 用 $S_{N(t)}$ 表示更新过程在 t 以前的最后一次更新时刻，则有 $S_{N(t)} \le t < S_{N(t)+1}$. 因为 $|X_j| \le M$，所以有 $S_{N(t)+1} - M \le S_{N(t)}$，于是

$$S_{N(t)+1} - M \le t < S_{N(t)+1}.$$

求数学期望后得到

$$\mu(m(t) + 1) - M \le t \le \mu(m(t) + 1).$$

两边同时除以 $m(t)$，让 $m(t) \to \infty$ 我们有 $t/m(t) \to \mu$. 于是我们有结论成立. □

定理 10.7: 基本更新定理

如果平均更新间隔 $\mu = E[X_1] < \infty$，则更新函数 $m(t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

证明. 由 $t < S_{N(t)+1}$ 我们得到 $t \le \mu(m(t)+1)$，从而有

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu}.$$

只需再证明 $\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}$. 对于正整数 M 和 $j = 1, 2, \cdots$，引入随机变量

$$\tilde{X}_j = \begin{cases} X_j, & \text{当 } X_j \le M, \\ M, & \text{当 } X_j > M. \end{cases}$$

记其数学期望 $\mu_M = E[\tilde{X}_j]$. 用 $\tilde{N}(t)$ 和 $\{\tilde{S}_j\}$ 分别表示以 $\{\tilde{X}_j\}$ 为更新间隔的更新过程和更新流，用 $\tilde{m}(t) = E[\tilde{N}(t)]$ 表示更新函数. 由于 $\tilde{X}_j \le X_j$，所以

$$N(t) = \#\{j|S_j \le t\} \le \#\{j|\tilde{S}_j \le t\} = \tilde{N}(t),$$

从而得到 $m(t) \le \tilde{m}(t)$. 利用命题 10.6 我们有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{\tilde{m}(t)}{t} = \frac{1}{\mu_M}.$$

令 $M \to \infty$，由命题 10.6 我们有 $\mu_M \to \mu$，从而得证. □

注记 10.8

当 $\mu = \infty$ 时，同样的讨论可知此时基本更新定理依然成立. (此时 $\mu_M \to \infty$.)

基本更新定理表明更新函数 $m(t)$ 和 t/μ 是同阶无穷大，

$$\frac{m(t)}{t/\mu} \to 1, \text{ 当 } t \to \infty \text{ 时}.$$

10.3 布莱克威尔定理

在基本更新定理中，如果更新函数严格单调上升，有连续的导函数 $m'(t)$，利用洛必达法则得到

$$\lim_{t\to\infty} m'(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

于是对任何非负常数 $a < b$，利用中值定理知道有 c_t 使得

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} [m(b+t) - m(a+t)] &= \lim_{t\to\infty} m'(a+t+c_t)(b-a) \\ &= \frac{b-a}{\mu}. \end{aligned}$$

在一般得情况下，$m(t)$ 是 $[0, t]$ 中的平均更新次数. 因为 μ 是平均更新间隔，所以对充分大的 t，t/μ 也近似等于 $[0, t]$ 中的平均更新次数，也就是说对充分大的 t 有

$$m(t) \approx \frac{t}{\mu}.$$

从而得到

$$m(b+t)-m(a+t)\approx\frac{b+t}{\mu}-\frac{a+t}{\mu}=\frac{b-a}{\mu}.$$

令 $t\to\infty$，形式上也得到

$$\lim_{t\to\infty}[m(b+t)-m(a+t)]=\frac{b-a}{\mu}.$$

定义 10.9

如果随机变量 X 只在正常数 d 的倍数上取值：

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(X=nd)=1,$$

则称 X 是**格点随机变量**. 如果 d 是使得上式成立的最大正数，则称 d 是 X 的**周期**.

如果 X 是有周期 d 的非负格点随机变量，更新间隔 $\{X_j\}$ 来自总体 X，则所有的 X_j 都是格点随机变量，从而到达时刻 S_n 也都是格点随机变量. 这时更新只可能在 $t=nd$ 处发生. 当 n 充分大时，可以理解有

$$m(nd)\approx\frac{nd}{\mu},$$

于是得到

$$m(nd)-m(nd-d)\approx\frac{nd}{\mu}-\frac{nd-d}{\mu}=\frac{d}{\mu}.$$

令 $n\to\infty$，形式上得到

$$m(nd)-m(nd-d)\to d/\mu.$$

注意，$m(nd)-m(nd-d)=E[N(nd-d,nd]]$ 是 $(nd-d,nd]$ 中的平均更新次数，从而是 $t=nd$ 处的平均更新次数.

定理 10.10: 布莱克威尔定理

设 $\mu=E[X_1]$ 是更新过程的平均更新间隔.

(1) 如果 X_1 不是格点随机变量，则对 $b>a\geq 0$，当 $t\to\infty$ 时，

$$m(b+t)-m(a+t)\to\frac{b-a}{\mu};$$

(2) 如果格点随机变量 X_1 有周期 d，则当 $t\to\infty$ 时，

$$m(nd)-m(nd-d)\to\frac{d}{\mu}.$$

注记 10.11

我们可以如下利用布莱克威尔定理证明基本更新定理. 如果 X 是非负非格点随机变量，取 $b_n=m(n+1)-m(n)$. 由布莱克威尔定理，当 $n\to\infty$ 时 $b_n\to 1/\mu$，于是我们知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}m(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}b_k=\frac{1}{\mu}.$$

对于任意 $t>0$，设 $[t]$ 为 t 的整数部分，由 $m(t)$ 的单调性我们知

$$\frac{[t]}{t}\frac{m([t])}{[t]} \le \frac{m(t)}{t} \le \frac{[t]+1}{t}\frac{M([t]+1)}{[t]+1}.$$

令 $t\to\infty$ 我们知当 $t\to\infty$ 时，$m(t)/t\to 1/\mu$. 如果 X 是有周期 d 的非负格点随机变量，取 $b_n=M((n+1)d)-M(nd)$，和上类似讨论可得.

10.4 关键更新定理

设 $h(t)$ 是 $[a,b)$ 上的函数，如果 $\int_a^b |h(t)|dt<\infty$，则称 $h(t)$ 在 $[a,b)$ 上可积，或称 $h(t)$ 是 $[a,b)$ 上的**可积函数**.

命题 10.12

对于 $[0,\infty)$ 上的可积函数 $h(s)$，当 $M\to\infty$ 时，有

$$\int_M^\infty |h(s)|ds\to 0.$$

设 $h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的非负函数. 对于 $a>0$，用 $\underline{m_n}(a)$ 和 $\overline{m_n}(a)$ 分别表示 $h(t)$ 在 $[(n-1)a, na]$ 中的上确界和下确界. 如果对 $a>0$，$\sum_{n=1}^\infty \overline{m_n}(a)<\infty$，且

$$\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^\infty a\overline{m_n}(a)=\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^\infty a\overline{m_n}(a)<\infty.$$

则称 $h(t)$ **直接黎曼可积**.

直接黎曼可积函数是 $[0,\infty)$ 上的可积函数. 但是 $[0,\infty)$ 上的可积函数不一定直接黎曼可积.

如果能将 $[0,\infty)$ 分成有限段的并，使得 $h(t)$ 在各段上有界且单调可积，则 $h(t)$ 直接黎曼可积. 如果 z 在 $[0,\infty)$ 上可积且存在一个直接黎曼可积函数 g 使得 $z\le g$，则 z 是直接黎曼可积的.

定理 10.13: 关键更新定理

设 $\mu=E[X_1]<\infty$ 是平均更新间隔. 如果 X_1 不是格点随机变量，则对 $[0,\infty)$ 上的任何直接黎曼可积函数 $h(s)$，有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds.$$

证明. 只对更新密度 $m'(t)$ 连续有界的情形给出证明. 设 $\sup_t m'(t)+1/\mu\le M_0$，由基本更新定理和洛必达法则知道 $m'(t)\to\mu^{-1}$. 对于充分大的 t，有 $M>0$ 使得

$$\sup_{0\le s\le M}|m'(t-s)-\mu^{-1}|<\epsilon,\ \frac{1}{\mu}\int_t^\infty h(s)ds=o(1),\ t\to\infty.$$

于是当 t 充分大时，有

$$
\begin{aligned}
&|\int_0^t h(t-x)dm(x) - \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds| \\
=&|\int_0^t h(s)m'(t-s)ds - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(s)ds + o(1)| \\
\leq&\int_0^t h(s)|m'(t-s)-\mu^{-1}|ds + o(1) \\
\leq&\int_0^M h(s)|m'(t-s)-\mu^{-1}|ds + \int_M^t h(s)|m'(t-s)-\mu^{-1}|ds + o(1) \\
\leq&\epsilon\int_0^\infty h(s)ds + M_0\int_M^\infty h(s)ds + o(1).
\end{aligned}
$$

在上式左端令 $t\to\infty$，然后在右端令 $M\to\infty$，最后令 $\epsilon\to 0$，我们知上式左端趋于 0. □

注记 10.14

如果 X_1 是周期 d 的格点随机变量，那么可以证明

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{d}{\mu}\sum_{k=0}^\infty z(t+kd).$$

推论 10.15

设 $\mu = E[X_1] < \infty$，X_1 不是格点随机变量，则对 $[0,\infty)$ 上单调不增的非负函数 $h(t)$，有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(s)ds.$$

证明. 因为 $h(s)$ 是单调不减的非负函数，所以它在 $[0,\infty)$ 中可积时，必然直接黎曼可积，这时结论成立. 下面对 $[0,\infty)$ 上的积分等于无穷的 $h(s)$，验证

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) = \infty.$$

对 $n\geq 1$，定义

$$h_n(s) = \begin{cases} h(s), & \text{当 } s\leq n, \\ 0, & \text{当 } s>n, \end{cases}$$

则有 $h_n(s)\leq h(s)$. h_n 在 $[0,\infty)$ 上单调不增非负可积，于是得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_0^t h(t-x)dm(x) &\geq \lim_{t\to\infty}\int_0^t h_n(t-x)dm(x) \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h_n(s)ds \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^n h(s)ds.
\end{aligned}
$$

令 $n\to\infty$ 即得. □

10.5 习题

习题 10.1

一副 52 张的扑克牌进行了洗牌，而后每次将一张牌翻开正面朝上. 对于 $i=1,2,\cdots,52$，定义 X_i 为 1，如果第 i 张翻开的牌是 A，否则定义为 0. 同时记 N 为直到四个 A 全出现时所翻开的牌数. 问方程

$$E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = E[N]E[X_i]$$

是否成立？如果不成立的话，为什么我们不能应用瓦尔德定理？

习题 10.2

某矿工被困在有三扇门的房间之中, 他选择门 1 则前进 2 天后可获自由; 选择门 2 则前进 4 天后回到这个房间; 选择门 3 则前进 6 天后还是回到这个房间. 假设任何时间他都等可能地选择 3 扇门中的任意一扇, 令 T 为这个矿工获得自由所用的时间. 求 $E[T]$.

第 11 讲　更新方程与开关系统

11.1　卷积及其性质

为了方便地得到更新方程的性质，先介绍一点卷积的基本性质．我们规定用 $\int_a^b$ 表示在闭区间 $[a,b]$ 上的积分．

本节中所讨论的函数当自变量在 $(-\infty,0)$ 中变化时，取值都是 0．

定义 11.1

设非负随机变量 X，Y 独立，分别有分布函数 $F(x)$，$G(x)$，则 $U=X+Y$ 有分布函数

$$\begin{aligned} F*G(t) &= P(X+Y\le t) \\ &= \int_0^t P(X+Y\le t|Y=s)dG(s) \\ &= \int F(t-s)dG(s). \end{aligned}$$

称 $F*G(t)$ 为 F 与 G 的**卷积**．

由于 $X+Y=Y+X$，所以有

$$F*G(t)=G*F(t).$$

再设 $Z\ge 0$，有分布函数 H，与 X,Y 独立，则 $X+Y+Z=U+Z$ 有分布函数 $(F*G)*H$．利用 $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$，我们有 $(F*G)*H-F*(G*H)$．于是可以把 $(F*G)*H$ 写成 $F*G*H$．

现在设 $h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的**局部有界函数** (指在任何有限区间 $[0,b)$ 上有界的函数)，$G(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数，也称

$$h*G(t)=\int_0^t h(t-s)dG(s),\ t\ge 0$$

为 h,G 的卷积．令 $t=0$ 时得到 $h*G(0)=h(0)G(0)$，并且有

$$\sup_{0\le t\le b}|h*G(t)|\le\int_0^b \sup_{0\le t\le b}|h(t)|dG(s)=\sup_{0\le t\le b}|h(t)|G(b),$$

所以 $h*G(t)$ 也是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数．对于另外的 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数 H，可以定义 $(h*G)*H(t)$．下面证明

$$(h*G)*H(t)=h*(G*H)(t),\ t\ge 0.$$

由于只需要对每个固定的 t 证明上式，所以无妨设 G 和 H 分别是 Y 和 Z 的分布函数，Y,Z 独立．于是

$$\begin{aligned} E[h(t-(Y+Z))I[Y+Z\le t]] &= \int_0^t E[h(t-Y-Z)I[Y+Z\le t]|Z=z]dH(z) \\ &= \int_0^t E[h(t-Y-z)I[Y+z\le t]]dH(z) \\ &= \int_0^t (\int_0^{t-z} h(t-y-z)dG(y))dH(z) \\ &= \int_0^t h*G(t-z)dH(z) \\ &= (h*G)*H(t),\ t\ge 0. \end{aligned}$$

另一方面，$U=Y+Z$ 有分布函数 $G*H$，所以又有

$$\begin{aligned}E[h(t-(Y+Z))I[Y+Z\le t]]&=E[h(t-U)I[U\le t]]\\&=\int_0^t h(t-u)d(G*H)(u)\\&=h*(G*H)(t).\end{aligned}$$

于是得证. 从而我们可以把括号省去，得到

$$h*G*H(t)=h*(G*H)(t)=(h*G)*H(t).$$

如果 $\{X_i\}$ 是独立同分布随机变量序列，有共同的分布函数 $F(x)$，则用

$$F_n(t)=P(S_n\le t)$$

表示 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的分布函数时，有

$$F_1(t)=F(t),\ F_2(t)=F*F(t),\ \cdots,\ F_n(t)=F*F*\cdots*F(t).$$

于是称 $F_n(t)$ 是 F 的 n 重卷积. 对任何使得 $i+j=n$ 的非负整数 i,j，可以看出有公式

$$F_n(t)=F_i*F_j(t).$$

另外，只要 $\mu=E[X_1]>0$，由强大数律得到 $S_n\to\infty$ a.s.，所以对任意 $t<\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}F_n(t)=\lim_{n\to\infty}P(S_n\le t)=0.$$

定理 11.2

设 $F(t)$ 是非负随机变量 X 的分布函数，$h(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的局部有界函数，G，H 是 $[0,\infty)$ 上单调不减的右连续函数，则对 $t\ge 0$，有

(1) $G*H(t)=H*G(t)$；

(2) $h*(G+H)=h*G+h*H$；

(3) $h*G*H(t)=(h*G)*H(t)=h*(G*H)(t)$；

(4) $\lim_{n\to\infty}F_n(t)=0$；

(5) 已知 $F(t)$ 时，方程 $h(t)=h*F(t)$ 只有零解 $h\equiv 0$；

(6) $m(t)=F(t)+m*F(t)$，其中 $m(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t)$ 是更新函数.

证明. 只需要证明 (5) 和 (6). 对于任何取定的 t，由卷积的定义知道

$$|h*F_n(t)|\le\sup_{0\le s\le t}|h(s)|F_n(t)\to 0,\ 当\ n\to\infty\ 时.$$

于是反复用 $h(t)=h*F(t)$ 得到

$$\begin{aligned}h(t)&=h*F(t)=(h*F)*F(t)=h*F_2(t)\\&=\cdots\cdots\\&=h*F_n(t)\to 0.\end{aligned}$$

下面我们来证明 (6)，根据单调收敛定理，我们有

$$\begin{aligned}
m(t) &= F(t) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n} F_{k-1} * F(t) \\
&= F(t) + \lim_{n\to\infty}\int_0^t \sum_{k=2}^{n} F_{k-1}(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + \int_0^\infty \sum_{k=2}^{n} F_{k-1}(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + \int_0^t m(t-s)dF(s) \\
&= F(t) + m * F(t).
\end{aligned}$$

从而得证. □

11.2 更新方程

我们仍用 $\{N(t)\}$ 表示更新间隔为 $\{X_i\}$ 的更新过程. 设 $h(t)$ 是已知的局部有界函数，$F(t)$ 是更新间隔 X_i 的分布函数. 未知函数 $B(t)$ 满足的方程

$$B(t) = h(t) + \int_0^t B(t-s)dF(s) \tag{11.1}$$

称为**更新方程**.

定理 11.3

更新方程 (11.1) 有唯一局部有界解

$$B(t) = h(t) + \int_0^t h(t-s)dm(s), \tag{11.2}$$

其中 $m(t) = E[N(t)]$ 是更新函数.

证明. 因为由 (11.2) 定义的 $B(t)$ 满足

$$\sup_{0\le s\le t}|B(s)| \le \sup_{0\le s\le t}|h(s)| + \sup_{0\le s\le t}|h(s)|m(t) < \infty,$$

所以是局部有界函数. 下面验证它满足 (11.1). 用 $m(t) = F(t) + m * F(t)$ 得到

$$\begin{aligned}
B(t) &= h(t) + \int_0^t h(t-s)dm(s) \\
&= h(t) + h * m(t) \\
&= h(t) + h * F(t) + h * m * F(t) \\
&= h(t) + (h + h * m) * F(t) \\
&= h(t) + B * F(t) \\
&= h(t) + \int_0^t B(t-s)dF(s).
\end{aligned}$$

所以由 (11.2) 定义的 $B(t)$ 是 (11.1) 的解. 如果 $B_1(t)$ 也是 (11.1) 的局部有界解，则局部有界函数 $b(t) = B(t) - B_1(t)$ 满足

$$b(t) = \int_0^t b(t-s)dF(s) = b * F(t).$$

由定理 11.2 (5) 我们知 $b(t)$ 恒等于 0，所以局部有界解是唯一存在的. □

注记 11.4

注意到更新函数 $m(t)$ 满足更新方程

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x).$$

11.3 分支过程

一种生物的个体在寿终时以概率 p_i 分裂成 i 个后代. 所有后代独立成活，寿终时又以概率 p_i 分裂成 i 个后代. 如果这种生物的寿命是来自总体 T 的随机变量，我们关心随着时间的推移，生物钟总数的平均增长情况.

先考虑一个生物的分裂问题. 将这个生物的降生时刻记为零时刻，用 $X(t)$ 表示 t 时刻该生物的后代数目，$\{X(t)\}$ 被称为 **分支过程**. 我们讨论 $EX(t)$ 的增长速度. 用 Y 表示 $\{p_i\}$ 为概率分布的随机变量，则每个生物寿终时平均分裂成

$$\mu_Y = E[Y] = \sum_{i=0}^{\infty} ip_i$$

个生物.

命题 11.5

对于分支过程 $\{X(t)\}$，设 $X(0)=1$，用 T_1 表示第一个体的寿命. 如果 $P(T_1>0)=1$，则有

$$E[X(t)|T_1=s] = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \le t < s, \\ \mu_Y E[X(t-s)] & \text{当 } 0 < s \le t. \end{cases}$$

证明. 用 Y_1 表示第一个个体寿终时分裂出的后代数. 已知 $T_1 = s > t \ge 0$ 时，t 时只有一个个体，故 $X(t)=1$. 已知 $T_1 = s \le t$ 时，如果在 s 时刻该个体分裂成了 i 个个体，则 $Y_1 = i$. 这 i 个个体独立生存，并且从 s 开始计时，经过 $t-s$ 时间，这 i 个个体的平均后代数为 $iE[X(t-s)]$. 于是对 $0<s\le t$，由定理 2.15 我们有

$$\begin{aligned} E[X(t)|T_1=s] &= \sum_{i=1}^{\infty} E[X(t)|T_1=s, Y_1=i]P(Y_1=i|T_1=s) \\ &\sum_{i=0}^{\infty} iE[X(t-s)]p_i = \mu_Y E[X(t-s)]. \end{aligned}$$

从而得证. □

用 $G(y) = P(Y \le y)$ 表示 Y 的分布函数. $\mu_Y = E[Y] \le 1$ 表明每个个体的平均后代数不大于 1. 这样的生物群体最终一定会消亡，不必讨论. 下面讨论 $\mu_Y > 1$ 的情况.

命题 11.6

对于分支过程 $\{X(t)\}$，用 $M(t) = E[X(t)]$ 表示 t 时单一个体的后代平均数，假设生物的寿命 T 不是格点随机变量，有分布函数 $F(x) = P(T \le x)$ 和且 $F(0)=0$. 假设 Y 表示每个个体后代数，其期望为 $\mu_Y > 1$. 我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{e^{\alpha t}} = \frac{\mu_Y - 1}{\mu_Y^2 \alpha E[Te^{-\alpha T}]},$$

其中 α 是方程

$$E[e^{-\alpha T}]=\frac{1}{\mu_Y} \tag{11.3}$$

的唯一解.

证明. 首先不难看出 $\phi(\alpha)=E[e^{-\alpha T}]=\int_0^\infty e^{-\alpha s}dF(s)$ 是 α 的单调连续函数，$\phi(0)=1>1/\mu_Y$，$\phi(\infty)=0<1/\mu_Y$，所以 (11.3) 有唯一解 α.

用 T_1 表示第一个个体的寿命. 利用全概率公式以及命题 11.5 我们有

$$\begin{aligned}M(t)=E[X(t)]&=\int_0^\infty E[X(t)|T_1=s]dF(s)\\&=\int_{t+}^\infty 1dF(s)+\int_0^t \mu_Y M(t-s)dF(s)\\&=\overline{F}(t)+\int_0^t \mu_Y M(t-s)dF(s),\end{aligned}$$

其中 $\int_{t+}^\infty=\int_{(t,\infty)}$. 上式两边同乘以 $e^{-\alpha t}$，得到更新方程

$$\frac{M(t)}{e^{\alpha t}}=e^{-\alpha t}\overline{F}(t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}M(t-s)dG(s),$$

其中

$$G(s)=\mu_Y\int_0^s e^{-\alpha u}dF(u)$$

是概率分布函数，使得 $dG(s)=\mu_Y e^{-\alpha s}dF(s)$. 由定理 11.3 我们有

$$\frac{M(t)}{e^{\alpha t}}=e^{-\alpha t}\overline{F}(t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\overline{F}(t-s)dm_G(s),$$

其中 $m_G(s)=\sum_{n=1}^\infty G_n(s)$ 是更新函数. 再利用关键更新定理和 $e^{-\alpha t}\overline{F}(t)\to 0(t\to\infty)$，得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{e^{\alpha t}}=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt,$$

其中

$$\mu_G=\int_0^\infty tdG(t)=\mu_Y\int_0^\infty te^{-\alpha t}dF(t)=\mu_Y E[Te^{-\alpha T}].$$

注意

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{F}(t)dt&=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\int_t^\infty dF(s)dt\\&=\int_0^\infty(\int_0^s e^{-\alpha t}dt)dF(s)\\&=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty(1-e^{-\alpha t})dF(s)\\&=\frac{1}{\alpha}(1-E[e^{-\alpha T}])\\&=\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{\mu_Y})=\frac{\mu_Y-1}{\alpha\mu_Y}.\end{aligned}$$

于是得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{e^{\alpha t}}=\frac{(\mu_Y-1)/\alpha\mu_Y}{\mu_Y E[Te^{-\alpha T}]}=\frac{\mu_Y-1}{\mu_Y^2\alpha E[Te^{-\alpha T}]}.$$

从而得证. □

上面命题表明只要 $\mu_Y>1$，$M(t)=E[X(t)]$ 与 $e^{\alpha t}$ 有相同的增长速度，也就是说分支过程的平均增长速度是指数阶的.

11.4 开关系统

如果把冰箱视为一个工作系统，则称 U_i 为系统的第 i 个开状态时间，称 V_i 为系统的第 i 个关状态时间. 由于系统只有开关两个状态，所以称为**开关系统**. 我们关心一个系统在一段时间内处于开状态的时间比例. 如果同时有多个系统运行，我们还关心同一时间有多少个系统处于开状态.

引入更新间隔 $X_i = U_i + V_i (i \geq 1)$. 称以 X_i 为更新间隔的更新过程 $\{N(t)\}$ 为**交替更新过程**.

在前 n 次更新中，系统处于开状态的比例是

$$\frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sum_{i=1}^n (U_i + V_i)}.$$

在引入 $X = U + V$，则 $\{X_i\}$ 是来自总体 X 的随机变量. 设

$$\mu_U = E[U],\ \mu_V = E[V],\ \mu_X = E[X] = \mu_U + \mu_V.$$

利用强大数律我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sum_{i=1}^n (U_i + V_i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (U_i + V_i)} = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V} \quad a.s..$$

所以，我们可以想象，当 t 充分大时，“t 时开” 的概率 $P(t\text{时开})$ 会收敛到 $\dfrac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V}$. 下面我们来证明这个结论.

用 $\overline{G}(t)$ 表示 U_1 的生存函数，用 $F_n(x) = P(S_n \leq x)$ 表示 S_n 的分布函数，则 $F(x) = F_1(x)$.

定理 11.7

如果 X_1 不是格点随机变量，μ_U, μ_V 是正数，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t\ \text{时开}) = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_V},$$
$$\lim_{t\to\infty} P(t\ \text{时关}) = \frac{\mu_V}{\mu_U + \mu_V}.$$

证明. 对于 $t > 0$，利用 $\{N(t) = 0\} = \{X_1 > t\}$ 得到

$$\begin{aligned} P(t\ \text{时开}, N(t) = 0) &= P(t\ \text{时开},\ X_1 > t) \\ &= P(U_1 > t,\ X_1 > t) \\ &= P(U_1 > t) \\ &= \overline{G}(t). \end{aligned}$$

对于 $n \geq 1$ 以及 $s \in [0, t]$，在条件 $S_n = s$ 下，$S_{n+1} = s + X_{n+1} > t$ 发生时，有 $\{t\ \text{时开}\} = \{U_{n+1} > t - s\}$. 这表明：对 $s \leq t$，有

$$\begin{aligned} P(t\ \text{时开}, N(t) = n | S_n = s) &= P(t\ \text{时开}, S_n \leq t, S_{n+1} > t | S_n = s) \\ &= P(U_{n+1} > t - s, s + X_{n+1} > t | S_n = s) \\ &= P(U_{n+1} > t - s, X_{n+1} > t - s) \\ &= P(U_{n+1} > t - s) = \overline{G}(t - s). \end{aligned}$$

事件 $\{N(t)=n\}(n=0,1,\cdots)$ 构成完备事件组. 利用全概率公式和 (2.2) 我们有:

$$\begin{aligned}P(t\text{ 时开}) &= P(t\text{ 时开}, N(t)=0)+\sum_{n=1}^{\infty}P(t\text{ 时开}, N(t)=n)\\ &= \overline{G}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t P(t\text{ 时开}, N(t)=n|S_n=s)dF_n(s)\\ &= \overline{G}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \overline{G}(t-s)dF_n(s)\\ &= \overline{G}(t)+\int_0^t \overline{G}(t-s)dm(s). \end{aligned}\tag{11.4}$$

注意 X_1 不是格点随机变量, $\overline{G}(s)$ 是单调不增函数, 积分

$$\int_0^{\infty}\overline{G}(s)ds=\mu_U<\infty.$$

所以当 $t\to\infty$ 时, 由 $\overline{G}(t)\to 0$ 和关键更新定理我们有

$$P(t\text{ 时开})\to\frac{1}{\mu_X}\int_0^{\infty}\overline{G}(s)ds=\frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_V}.$$

最后得到

$$P(t\text{ 时关})=1-P(t\text{ 时开})\to\frac{\mu_V}{\mu_U+\mu_V}.$$

从而得证. □

对于 $b>a\geq 0$, 为了研究时间段 $(a,b]$ 中开状态的平均长度引入

$$U(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } t \text{ 是开状态},\\ 0, & \text{当 } t \text{ 是关状态},\end{cases}$$

则

$$W(t)=\int_0^t U(s)ds$$

是 $[0,t]$ 中开状态时间的长度,

$$W(a,b]=\int_a^b U(s)ds$$

是 $(a,b]$ 中开状态时间的长度, $E[W(a,b]]$ 是 $(a,b]$ 中开状态的平均长度. 我们知

$$h(t)=E[U(t)]=P(t\text{ 时开})$$

是 $(a,b]$ 中的黎曼可积函数.

定理 11.8

如果 μ_U,μ_V 是正数, X_1 不是格点随机变量, 则

$$\lim_{t\to\infty}E[W(a+t,b+t]]=\frac{(b-a)\mu_U}{\mu_U+\mu_V}.$$

证明. 因为 $\{N(t)\}$ 在 $(a,b]$ 中只有有限次更新, 所以 $U(t)$ 的每条轨迹都是 $(a,b]$ 中的阶梯函数, 只有有限个跳跃点, 从而是黎曼可积函数. 按照黎曼积分的定义, 将 $(a,b]$ 进行 n 等分, 记等分点为

$$a-k=a+(b-a)k/n,\ k=0,1,2,\cdots,n.$$

则有

$$\int_a^b U(s)da = \lim_{n\to\infty} \xi_n \ a.s.,\ \text{其中}\ \xi_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} U(a_k).$$

因为 ξ_n 有界：$|\xi_n| \le b-a$，所以用有界收敛定理我们有

$$\begin{aligned} E[W(a,b)] &= E[\int_a^b U(s)ds] = \lim_{n\to\infty} E[\xi_n] \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} E[U(a_k)] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} h(a_k) \\ &= \int_a^b h(s)ds. \end{aligned}$$

把 a,b 分别换成 $a+t, b+t$，得到

$$E[W(a+t,b+t)] = \int_{a+t}^{b+t} h(s)ds = \int_a^b h(t+s)ds.$$

注意 $h(t)$ 有界，且 $\lim_{t\to\infty} h(t) = \mu_U/(\mu_U+\mu_V)$，所以再由有界收敛定理我们有

$$\lim_{t\to\infty} E[W(a+t,b+t)] = \lim_{t\to\infty}\int_a^b h(t+s)ds = \frac{(b-a)\mu_U}{\mu_U+\mu_V}. \qquad \square$$

11.5 多个状态的系统

设一个系统有 r 个工作状态. 系统在一开始处于状态 1，在状态 1 工作 U_{11} 时间后进入状态 2，在状态 2 工作 U_{12} 时间后进入状态 3，……，在状态 $r-1$ 工作 $U_{1,r-1}$ 时间后进入状态 r，在状态 r 工作 U_{1r} 时间后完成一次循环，重新进入状态 1. 可以看出 U_{ij} 是第 i 次循环处于状态 j 的工作时间长度. 引入

$$\mathbf{X} = (U_1, U_2, \cdots, U_r).$$

认为

$$\mathbf{U}_i = (U_{i1}, U_{i2}, \cdots, U_{ir}),\ i = 1, 2, \cdots$$

是来自总体 $\mathbf{X}$ 的随机向量. 对于给定的 $j = 1, 2, \cdots, r$，$\{U_{ij}|i = 1, 2, \cdots\}$ 是来自总体 U_j 的随机变量.

用 $\mu_i = E[U_i]$ 表示一个循环中系统处于第 i 个状态的平均时间长度.

定理 11.9

如果 X 不是格点随机变量，数学期望 $\mu = E[X] \in (0,\infty)$，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t\ \text{时处于状态}\ j) = \frac{\mu_j}{\mu_1+\cdots+\mu_r}.$$

证明. 当 $j=1$ 时，把状态 1 称为开状态，把其余的状态统称为关状态. 这相当于在开关系统中

$$U_i = U_{i1},\ V_i = U_{i2}+\cdots+U_{ir},\ i = 1, 2, \cdots.$$

利用定理 11.7 我们有结论成立.

当 $j = r$ 时，把状态 $1, 2, \cdots, r-1$ 都称为开状态，把状态 r 称为关状态. 这相当于在开关系统中

$$U_i = U_{i1}+\cdots+U_{i,r-1},\ V_i = U_{ir},\ i = 1, 2, \cdots.$$

利用定理 11.7 我们有结论成立.

当 $1 < j < r$ 时，对 $i = 1, 2, \cdots$，引入

$$U_i = U_{i1} + \cdots + U_{i,j-1},\ W_i = U_{ij},\ V_i = U_{i,j+1} + \cdots + U_{ir},$$

则 $X_i = U_i + W_i + V_i$. 将 $\{N(t)\}$ 视为有 U, W, V 三种状态的工作状态，则有

$$P(t\text{时处于状态 } U) + P(t\text{时处于状态 } W) + P(t\text{时处于状态 } V) = 1.$$

由上面刚得到的结论我们有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(t\text{时处于状态 } j) = &\lim_{t\to\infty} P(t\text{时处于状态 } W)\\ =&1 - \lim_{t\to\infty} P(t\text{时处于状态 } U) - \lim_{t\to\infty} P(t\text{时处于状态 } V)\\ =&1 - \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_{j-1}}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r} - \frac{\mu_{j+1} + \cdots + \mu_r}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r}\\ =&= \frac{\mu_j}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r}.\end{aligned}$$

□

11.6 习题

习题 11.1

设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个更新过程，已知其更新函数 $m(t) = E[N(t)]$. 求 $g(t) := E[N(t)^2]$.

习题 11.2

某保险公司对某种保险有两档收费率，分别为每单位时间 r_1 (称为一档保费) 和 r_0 (称为二档保费) . 设参保人一开始缴纳一档保费. 如果他缴纳一档保费之后，在连续 s 个单位时间内没有发生理赔，那么他会将保费切换到二档保费；一旦发生理赔，参保人会维持或切换到一档保费. 设理赔的发生构成一个参数 λ 的 Poisson 过程. 假设参保人的参保时间充分的长，求他单位时间所付的平均保费.

第 12 讲　年龄与剩余寿命

用非负随机变量 X 表示某种设备的使用寿命. 则时间 t 时服役的设备的更新时刻为 t 以前的最后一次更新时刻 $S_{N(t)}$，寿终时刻为 t 之后的第一次更新时刻 $S_{N(t)+1}$. 同样地我们定义

$$A(t)=t-S_{N(t)},\ R(t)=S_{N(t)+1}-t.$$

$A(t)$ 是 t 时服役的部件的使用年龄，$R(t)$ 是 t 时服役的部件的剩余寿命. 以后将 $A(t)$ 简称为 **年龄**，将 $R(t)$ 简称为 **剩余寿命**.

用 $F(y)$ 表示更新间隔 X_i 的分布函数：$F(y)=P(X_i\le y)$. 用 $\mu=E[X_i]$ 表示 X_i 的数学期望. 下面设 $\mu\in(0,\infty)$.

12.1　年龄 $A(t)$ 的分布

设一个工作系统的某易损部件有独立同分布的使用寿命 $X_1,X_2,\cdots$. 部件损坏后立即更新，相应的更新过程是 $\{N(t)\}$. 对于固定的 $y>0$，设每个部件的试用期为 y，试用期后进入工作期. 让我们把试用期称为开状态，把工作期称为关状态. 一个部件的使用寿命如果小于 y，则只有开状态，没有关状态.

用数学符号表示出来：第 i 个部件的试用期是是 $U_i=\min(y,X_i)$，工作期是 $V_i=X_i-U_i$. 可以看出 (U_i,V_i) $(i=1,2,\cdots)$ 是独立同分布的随机向量序列，$X_i=U_i+V_i$. 对于 $\{N(t)\}$ 来讲，t 时为开状态的充分必要条件是 t 时的服役部件的年龄 $A(t)\le y$，即有

$$\{A(t)\le y\}=\{t\text{ 时是开状态}\}.$$

根据定理 11.7，如果 X_i 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty}P(A(t)\le y)=\lim_{t\to\infty}P(t\text{ 时开})=\frac{E[U_1]}{\mu}.$$

因为

$$\begin{aligned}E[U_1]=E[\min(y,X_1)]&=\int_0^\infty P(\min(y,X_1)>s)ds\\&=\int_0^\infty P(y>s,X_1>s)ds=\int_0^y P(X_1>s)ds\\&=\int_0^y\overline{F}(s)ds,\end{aligned}$$

所以有

$$\lim_{t\to\infty}P(A(t)\le y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y\overline{F}(s)ds.$$

也就是说，对于较大的 t，年龄 $A(t)$ 的分布函数可以用

$$F_A(y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y\overline{F}(s)ds,\ y\ge 0$$

近似，其中 $\mu=E[X_i]$.

12.2　剩余寿命 $R(t)$ 的分布

如果认为易损部件在寿终前的 y 小时进入异常状态，并把异常状态称为关状态，把异常之前的正常状态称为开状态，则第 i 个部件的关状态时间长为 $V_i=\min(y,X_i)$，开状态时间长为 $U_i=X_i-V_i$.

可以看出 (U_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 也是独立同分布的随机向量序列，$X_1 = U_i + V_i$. $\{N(t)\}$ 是以 $\{X_i\}$ 为更新间隔的更新过程. 对于 $\{N(t)\}$ 来讲，t 时是关状态的充分必要条件是 t 时服役部件的剩余寿命 $R(t) \le y$，即

$$\{R(t) \le y\} = \{t \text{ 时是关状态}\}.$$

根据定理 11.7，如果 X_i 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \le y) = \lim_{t\to\infty} P(t \text{ 时关}) = \frac{E[V_1]}{\mu}.$$

因为

$$E[V_i] = E[\min(y, X_1)] = \int_0^y \overline{F}(s)ds,$$

所以得到

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \le y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds.$$

也就是说，对于较大的 t，剩余寿命 $R(t)$ 的分布函数也可以用

$$F_R(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds,\ y \ge 0$$

近似，其中 $\mu = E[X_i]$.

12.3 t 时服役部件的寿命分布

t 时服役部件的寿命是该部件在 t 是的年龄和剩余寿命之和：

$$X_{N(t)+1} = A(t) + R(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}.$$

对于确定的 $y > 0$，为了得到 $X_{N(t)+1}$ 的极限分布，利用示性函数 $1[\cdot]$ 定义

$$U_i = X_i 1[X_i > y],\ V_i = X_i I[X_i \le y],\ i = 1, 2, \cdots.$$

于是 (U_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 是独立同分布的随机向量，且 $X_i = U_i + V_i$. 用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{U_i\}$ 为开状态，以 $\{V_i\}$ 为关状态的开关系统. 对于更新过程 $\{N(t)\}$ 来讲，一个部件的使用寿命 $\le y$ 时，这个部件就一直处于关状态，否则一直处于开状态. 于是服役部件在 t 时处于关状态的充分必要条件是其使用寿命 $X_{N(t)+1} \le y$，即

$$\{X_{N(t)+1} \le y\} = \{t \text{ 是关状态}\}.$$

根据定理 11.7，如果 X_i 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty} P(X_{N(t)+1} \le y) = \lim_{t\to\infty} P_t(t \text{ 时关}) = \frac{E[V_1]}{\mu}.$$

注意到

$$E[V_1] = E[X_1 I[X_1 \le y]] = \int_0^y sdF(s).$$

所以得到

$$\lim_{t\to\infty} P(X_{N(t)+1} \le y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y sdF(s).$$

也就是说，对于较大的 t，t 时服役部件的使用寿命可以用

$$F_X(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y sdF(s)$$

近似，其中 $\mu = E[X_i]$.

12.4 $S_{N(t)}$ 的分布函数

我们知 $S_{N(t)}$ 是 t 之前的最后一次更新时刻. 利用 $S_0=0$，$\{N(t)=n\}=\{S_n\le t, S_{n+1}>t\}$，对 $x\in[0,t]$ 得到

$$\begin{aligned}P(S_{N(t)}\le x)&=P(S_0\le x, N(t)=0)+\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\le x, N(t)=n)\\&=P(X_1>t)+\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\le x, S_{n+1}>t)\\&=\overline{F}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}P(S_n\le x, S_n+X_{n+1}>t|S_n=s)dF_n(s)\\&=\overline{F}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{x}P(X_{n+1}>t-s)dF_n(s)\\&=\overline{F}(t)+\int_0^{x}\overline{F}(t-s)dm(s).\end{aligned}$$

再由此得到 $A(t)$ 的生存函数

$$\begin{aligned}P(A(t)>x)&=P(t-S_{N(t)}>x)=P(S_{N(t)}<t-x)\\&=\overline{F}(t)+\int_0^{(t-x)-}\overline{F}(t-s)dm(s),\ 0\le x\le t,\end{aligned}$$

其中 $\int_a^{b-}$ 表示区间 $[a,b)$ 上的积分.

12.5 总结

定理 12.1

设 $\{X_i\}$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔，$m(t)=E[N(t)]$ 是更新函数，$\overline{F}(s)=P(X_1>s)$，$\mu=E[X_1]\in(0,\infty)$，则

(1) $S_{N(t)}$ 有分布函数

$$F_{S_{N(t)}}(x)=P(S_{N(t)}\le x)=\overline{F}(x)+\int_0^{s}\overline{F}(t-s)dm(s),\ 0\le x\le t;$$

(2) $A(t)$ 有生存函数

$$\overline{F}_{A(t)}(x)=\overline{F}(t)+\int_0^{(t-x)-}\overline{F}(t-s)dm(s);$$

(3) 当 X_1 不是格点随机变量时，有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}P(A(t)\le y)&=\frac{1}{\mu}\int_0^{y}\overline{F}(s)ds,\\\lim_{t\to\infty}P(R(t)\le y)&=\frac{1}{\mu}\int_0^{y}\overline{F}(s)ds,\\\lim_{t\to\infty}P(X_{N(t)+1}\le y)&=\frac{1}{\mu}\int_0^{y}sdF(s).\end{aligned}$$

由定理 12.1 (1) 得到

$$P(S_{N(t)}=0)=\overline{F}(t)+\overline{F}(t)m(0)=\overline{F}(t)[1+m(0)].$$

这说明 $S_{N(t)}$ 一般不是连续型随机变量.

另外，在式

$$F_{S_{N(t)}}(x) = P(S_{N(t)} \le x) = \overline{F}(x) + \int_0^s \overline{F}(t-s)dm(s),\ 0 \le x \le t;$$

中关于 x 微分，我们有

$$dF_{S_{N(t)}}(x) = \overline{F}(t-x)dm(x),\ 0 < x \le t.$$

注意 $S_{N(t)} = 0$ 表示 $(0, t]$ 中没有更新发生，所以 $F(x)$ 连续时，

$$\{S_{N(t)} = 0\} = \{X_1 > t\}.$$

对于开关系统，在条件 $S_{N(t)} = 0$ 下，$U_1 > t$ 表示系统的第一次开关状态还没有结束，所以当 $F(x)$ 连续时，

$$P(t\ \text{时开}|S_{N(t)} = 0) = P(U_1 > t|X_1 > t) = \frac{P(U_1 > t)}{P(X_1 > t)}.$$

用 $N_Y(t)$ 表示以 $\{Y_i\}$ 为更新间隔的更新过程，对于更新时刻 $\xi_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 和 $n \ge 1$，$t \ge 0$，于是

$$\{\xi_{n-1} \le t < \xi_n\} = \{N_Y(t) = n - 1\}.$$

例 12.2

甲一开始为自己的手机充值 b 元，并决定只要发现手机余额小于 a 元就立即充值到 b 元，以此类推. 假设他的通话间隔是独立同分布的随机变量 $\{X_i\}$，每次的通话费是独立同分布的随机变量 $\{Y_i\}$，与 $\{X_i\}$ 独立. 将通话时间忽略不记时，对于充分大的 t，估算 t 时手机中至少有 x 元余额的概率 p.

解. 用 $\xi_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ 表示前 n 次通话的总消费. 设第 N_a 次通话后的余额首次少于 a 元，则有

$$\begin{aligned}\{N_a = n\} &= \{b - \xi_{n-1} \ge a, b - \xi_n < a\} \\ &= \{\xi_{n-1} \le b - a < \xi_n\} = \{N_Y(b-a) = n - 1\} \\ &= \{N_Y(b-a) + 1 = n\}\end{aligned}$$

于是得到 $N_a = N_Y(b-a) + 1$. 现把每次充值视为一次更新，第一个更新间隔为 $Z_1 = \sum_{i=1}^{N_n} X_i$. 对 $x \ge a$，将上面的 a 换成 x，就知道第 $N_x = N_Y(b-x) + 1$ 次通话后余额首次少于 x 元，并且 $U_1 = \sum_{i=1}^{N_x} X_i$ 是余额首次少于 x 元的时间. 将余额大于 x 元的时间段称为开状态，少于等于 x 元的时间段称为关状态，则有

$$p \approx \lim_{t\to\infty} P(t\ \text{时开}) = \frac{E[U_1]}{E[Z_1]}.$$

N_a, N_x 由 Y_i 决定，与 $\{X_i\}$ 独立. 用瓦尔德定理我们有

$$E[Z_1] = E[N_a]E[X_1] = (m_G(b-a) + 1)E[X_1],$$

$$E[U_1] = E[N_x]E[X_1] = (m_G(b-x) + 1)E[X_1].$$

其中的 $m_G(t) = E[N_Y(t)]$ 是 $N_Y(t)$ 的更新函数. 从而我们有

$$p \approx \frac{1 + m_G(b-x)}{1 + m_G(b-a)}.$$

□

12.6 年龄，寿命与更新间隔的比较

定义 12.3

称随机变量 X **随机小于**随机变量 Y，如果对于一切 s，$P(X \le s) \ge P(Y \le s)$. 当 X 随机小于 Y 时，也称 Y **随机大于** X.

命题 12.4

如果非负随机变量 X 随机小于 Y，则 Y 是非负随机变量，并且有

$$E[X] \le E[Y].$$

证明. 设 X, Y 分别有生存函数 $\overline{F}(s) = P(X > s)$，$\overline{G}(s) = P(Y > s)$，则对任意 s，$\overline{G}(s) \ge \overline{F}(s)$. 于是有

$$P(Y \ge 0) = \overline{G}(0-) \ge \overline{F}(0-) = 1.$$

所以 Y 是非负随机变量，并且有

$$E[Y] = \int_0^\infty \overline{G}(s)ds \ge \int_0^\infty \overline{F}(s)ds = E[X]. \qquad \square$$

12.6.1 $A(t)$，$R(t)$ 和更新间隔的比较

例 12.5

设 $\{X_i\}$ 独立同分布，共同的密度函数是

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2},\ x \ge 0.$$

这是 1 个自由度的卡方分布的密度，$\mu = E[X_1] = 1$. 用 η 表示以

$$F_A(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(x)dx$$

为分布函数的随机变量. 利用洛必达法则得到

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{F(x)}{F_A(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\mu f(x)}{1 - F(x)} = \infty.$$

所以对于充分小的正数 x_0，$F(x_0) > F_A(x_0)$. 利用

$$\lim_{t \to \infty} P(A(t) \le x) = F_A(x)$$

我们知，当 t 充分大时，有

$$P(A(t) \le x_0) < P(X_1 \le x_0).$$

所以 $A(t)$ 并不随机小于 X_1.

类似地可以举例说明对于充分大的 t，$R(t)$ 也不必随机小于更新间隔 X_1.

12.6.2 $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔

首先由定理 12.1 (1) 和 $S_{N(t)} \le t$ 得到

$$\overline{F}(t) + \int_0^t \overline{F}(t-s)dm(s) = P(S_{N(t)} \le t) = 1.$$

用 $\{X_i\}$ 表示更新间隔，引入

$$U_i = X_i 1[X_i > x],\ V_i = X_i 1[X_i \le x],\ i = 1, 2, \cdots,$$

则 (U_i, V_i) $(i = 1, 2, \cdots)$ 是独立同分布的随机向量序列，使得 $X_i = U_i + V_i$. 这时，$\{N(t)\}$ 又是以 $\{U_i\}$ 为开状态，以 $\{V_i\}$ 为关状态的开关系统. 于是 t 时间服役的部件在 t 时处于开状态的充分必要条件是其使用寿命 $X_{N(t)+1} > x$，即

$$\{X_{N(t)+1} > x\} = \{t \text{ 是开状态}\}.$$

U_1 的生存函数 $\overline{G}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\overline{G}(t) &= P(U_1 > t) = P(X_1 > x, X_1 > t)\\ &\ge P(X_1 > x)P(X_1 > t) = \overline{F}(x)\overline{F}(t),\ t \ge 0.\end{aligned}$$

从而由 (11.4) 我们有

$$\begin{aligned}P(X_{N(t)+1} > x) &= P(t \text{ 时开})\\ &= \overline{G}(t) + \int_)^t \overline{G}(t-s)dm(s)\\ &\ge \overline{F}(x)\overline{F}(t) + \int_0^t \overline{F}(x)\overline{F}(t-s)dm(s)\\ &= \overline{F}(x)[\overline{F}(t) + \int_0^t \overline{F}(t-s)dm(s)]\\ &= \overline{F}(x).\end{aligned}$$

这就证明了 $X_{N(t)+1}$ 随机大于更新间隔 X_i. 于是我们对 $X_{N(t)+1}$ 的期望也大于对 X_i 的期望，即 $E[X_{N(t)+1}] \ge E[X_i]$.

12.7 $EA(t)$, $E(R(t))$ 和 $EX_{N(t)+1}$ 的极限

下面证明

$$\lim_{t\to\infty} E[X_{N(t)+1}] = \frac{E[X^2]}{\mu}.$$

引入符号 $a \vee b = \max(a, b)$，则 $U = XI[X > x]$ 有生存函数

$$\overline{G}(t) = P(X > x, X > t) = \overline{F}(x \vee t).$$

由 (11.4) 我们有：

$$\begin{aligned}P(X_{N(t)+1} > x) &= P(t \text{ 时开})\\ &= \overline{G}(t) + \int_0^t \overline{G}(t-s)dm(s)\\ &= \overline{F}(x \vee t) + \int_0^t \overline{F}(x \vee (t-s))dm(s).\end{aligned}$$

引入函数

$$h(t) = \int_0^\infty \overline{F}(x \vee t)dx,$$

其为 t 的单调不增非负函数. 利用定理 2.9 我们可以得到

$$\begin{aligned}
E[X_{N(t)+1}] &= \int_0^\infty P(X_{N(t)+1} > x)dx \\
&= \int_0^\infty \overline{F}(x \vee t)dx + \int_0^\infty (\int_0^t \overline{F}(x \vee (t-s))dm(s))dx \\
&= h(t) + \int_0^t (\int_0^\infty \overline{F}(x \vee (t-s))dx)dm(s) \\
&= h(t) + \int_0^t h(t-s)dm(s).
\end{aligned}$$

当 $t \to \infty$ 时，用 $\mu = E[X_1] < \infty$ 我们得到

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t \overline{F}(t)dx + \int_t^\infty \overline{F}(x)dx \\
&= t\overline{F}(t) + \int_t^\infty \overline{F}(x)dx \\
&\le \int_t^\infty x dF(x) + \int_t^\infty \overline{F}(x)dx \to 0.
\end{aligned}$$

如果 X 不是格点的，利用关键更新定理得到

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(t-s)dm(s) &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(t)dt \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (\int_0^\infty \overline{F}(x \vee t)dx)dt \\
&= \frac{1}{\mu}(\int_0^t \overline{F}(t)dx + \int_t^\infty \overline{F}(x)dx)dt \\
&= \frac{1}{\mu}[\int_0^\infty t\overline{F}(t)dt + \int_0^\infty (\int_0^x \overline{F}(x)dt)dx] \text{ (交换积分次序)} \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty 2t\overline{F}(t)dt \\
&= E[X^2]/\mu.
\end{aligned}$$

所以当 $\mu < \infty$ 时，$\lim_{t\to\infty} E[X_{N(t)+1}] = \frac{E[X^2]}{\mu}$.

定理 12.6

设 $\{X_i\}$ 是更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔，$\mu = E[X_1] \in (0, \infty)$. 如果 X_1 不是格点随机变量，则有以下结论：

(1) $\lim_{t\to\infty} E[X_{N(t)+1}] = E[X_1^2]/\mu$;

(2) $\lim_{t\to\infty} E[A(t)] = E[X_1^2]/(2\mu)$;

(3) $\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = E[X_1^2]/(2\mu)$;

(4) $\lim_{t\to\infty}[m(t) - t/\mu + 1] = E[X_1^2]/(2\mu^2)$.

在上面的结论中，如果 $E[X_1^2] = \infty$，则等式两边都是正无穷.

证明. 可以用证明 (1) 的方法证明 (2) 和 (3). 下面证明 (4)，利用 $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ 和命题 10.6 (2) 我们有

$$E[R(t)] = E[S_{N(t)+1}] - t = (m(t)+1)\mu - t.$$

于是用结论 (3) 我们有

$$m(t)-t/\mu+1=E[R(t)]/\mu\to E[X^2]/(2\mu^2). \qquad \square$$

在更新过程中，如果更新间隔 X_i 的方差 $\sigma^2=\mathrm{Var}(X_1)>\mu^2$. 则有

$$\frac{E[X^2]}{2\mu}=\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}>\frac{\mu^2+\mu^2}{2\mu}=\mu.$$

于是对于充分大的 t，有

$$E[A(t)]>\mu,\ E[R(t)]>\mu.$$

也就是说 t 时服役部件的平均年龄或平均剩余寿命，都有可能大于同类备用部件的平均寿命 μ.

12.8 更新过程的汇合

设 N_1 和 N_2 是两个具有相同分布 F，相互独立的时间间隔为非格点随机变量的更新过程. 记它们的汇合 $\tilde{N}(t)=M_1(t)+N_2(t)$. 注意到一般情况下 $\tilde{N}$ 不是一个更新过程. 实际上，我们有

定理 12.7

$\tilde{N}$ 是一个更新过程当且仅当 N_1 和 N_2 是泊松过程.

证明. 如果 N_1 和 N_2 是强度为 λ 的泊松过程. 则我们有 $\tilde{N}$ 是强度 2λ 的泊松过程. 反过来，设 $\tilde{N}$ 是一个更新过程，记 $\{X_n(1)\}$，$\{X_n(2)\}$ 和 $\{\tilde{X}_n\}$ 分别是过程 N_1，N_2 和 $\tilde{N}$ 的时间间隔. 显然 $\tilde{X}_1=\min\{X_1(1),X_1(2)\}$，于是 $\tilde{X}_1$ 的分布函数 $\tilde{F}$ 满足

$$1-\tilde{F}(y)=[1-F(y)]^2.$$

记 $R_1(t)$，$R_2(t)$ 和 $\tilde{R}_t$ 是 N_1，N_2 和 $\tilde{N}$ 在时刻 t 的剩余寿命. 显然 $\tilde{R}(t)=\min\{R_1(t),R_2(t)\}$，于是

$$P(\tilde{R}(t)>y)=P(R_1(t)>y)^2.$$

让 $t\to\infty$ 我们有

$$\frac{1}{\tilde{\mu}}\int_y^\infty[1-\tilde{F}(x)]dx=\frac{1}{\mu^2}(\int_y^\infty[1-F(x)]dx)^2,$$

其中 $\tilde{\mu}=E[\tilde{X}_1]$，$\mu=E[X_1(1)]$. 对上式关于 y 求导我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{\mu}}[1-\tilde{F}(y)]&=\frac{2}{\mu^2}[1-F(y)]\int_y^\infty[1-F(x)]dx\\&=\frac{1}{\tilde{\mu}}[1-F(y)]^2.\end{aligned}$$

于是

$$1-F(y)=\frac{2\tilde{\mu}}{\mu^2}\int_y^\infty[1-F(x)]dx.$$

解上面的积分方程，我们有

$$F(y)=1-\exp(-\frac{2\tilde{\mu}}{\mu^2}y).$$

于是 N_1 和 N_2 的时间间隔服从指数分布，从而 N_1 和 N_2 是泊松过程. $\square$

12.9 习题

习题 12.1

对于一个更新过程, 令 $A(t)$ 是在时刻 t 的年龄. 证明若 $\mu < \infty$, 则以概率 1 有

$$\frac{A(t)}{t} \to 0, \text{ 当 } t \to \infty \text{ 时}.$$

第 13 讲　延迟更新过程与有偿更新过程

13.1　平衡更新过程

在实际问题中，对于更新过程 $\{N(t)\}$ 的记录或观测有时不是从 $t=0$ 开始的. 如果更新过程在很久以前就开始了，从 t_0 开始记录的更新过程的第一个更新间隔 $X_1 = R(t_0)$ 的分布函数近似等于

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(s)ds,\ x \geq 0. \tag{13.1}$$

如果更新过程已经有无穷长的历史，则在时刻 t 重新记录的更新过程的第一个更新间隔 X_1 有分布函数 (13.1)，其余的更新间隔 $\{X_j | j \geq 2\}$ 依然是来自总体 X 的随机变量.

定义 13.1

设 X 和 X_1 是非负随机变量，分布函数分别是 $F(x)$ 和由 (13.1) 定义的 $F_e(x)$. 如果 $\{X_j j \geq 2\}$ 是来自总体 X 的随机变量，和 X_1 独立，则称以 $\{X_j | j \geq 1\}$ 为更新间隔的更新过程

$$N_e(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I[S_j \leq t],\ t \geq 0$$

为**平衡更新过程**，称 X_j 为第 j 个更新间隔，称

$$S_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_j$$

为第 j 个更新时刻.

对于平衡更新过程也可以定义时刻 t 的**剩余寿命** $R_e(t)$. 由于平衡更新过程是有无穷长历史的更新过程，所以对于 $t \geq 0$，t 时的剩余寿命 $R_e(t)$ 应当有分布函数 $F_e(x)$，此外，$N_e(t+s) - N_e(t)$ 是具有无穷长历史的更新过程在区间 $(t, t+s]$ 中的更新次数，应当与 t 无关，所以平衡更新过程应当具有平稳增量性.

定理 13.2

平衡更新过程 $\{N_e(t)\}$ 是平稳增量过程，对于 $t \geq 0$，剩余寿命 $R_e(t)$ 和 X_1 有相同的分布函数 $F_e(x)$.

例 13.3

强度为 λ 的泊松过程是平衡更新过程.

证明. 泊松过程的更新间隔 X 服从指数分布. 由指数分布的无记忆性知剩余寿命 $R(t)$ 和 X 同分布，于是 $X_1 \sim F_e(x) = F(x)$. □

具有平稳增量的计数过程又称为**平稳点过程**. 平衡更新过程是平稳点过程.

13.2 延迟更新过程

定义 13.4

设 X 和 X_1 是非负随机变量，$\{X_j|j \geq 2\}$ 是来自总体 X 的随机变量，X_1 和总体 X 独立. 称以 $\{x_j\}$ 为更新间隔的更新过程

$$N_D(t) = \sum_{j=1}^{\infty} 1[S_j \leq t],\ t \geq 0$$

为**延迟更新过程**，称 X_j 为第 j 个更新间隔，称

$$S_j = X_1 + X_2 + \cdots + X_j$$

为第 j 个更新时刻.

容易理解，如果 X_1 也和 X 同分布，则 $N_D(t)$ 简化成更新过程. 当 X 有分布函数 $F(x)$，X_1 的分布函数是 $F_e(x)$ 时，$N_D(t)$ 是平衡更新过程.

设 $G(x) = P(X_1 \leq x)$，$F(x) = P(X \leq x)$. 用 $m_D(t) = E[N_D(t)]$ 表示延迟更新过程的更新函数，用 F_0 表示常数 0 的分布函数，则有

$$m_D(t) = \sum_{j=1}^{\infty} E[I[S_j \leq t]] = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1 + (S_j - X_1) \leq t) = \sum_{j=1}^{\infty} G * F_{j-1}(t).$$

对于延迟更新过程，也可以定义 t 时刻的年龄 $A_D(t)$ 和剩余寿命 $R_D(t)$ 如下：

$$A_D(t) = t - S_{N(t)},\ R_D(t) = S_{N(t)+1} - t.$$

引入 $X_D(t) = A_D(t) + R_D(t)$，则 $X_D(t)$ 是 t 时服役的部件的寿命.

定理 13.5

设总体 X 有分布函数 $F(t)$，数学期望 $\mu = E[X]$，X_1 有分布函数 $G(x)$. 以下结果成立：

(1) 更新函数 $m_D(t) = \sum_{m=1}^{\infty} G * F_{n-1}(t)$ 是更新方程

$$m(t) = G(t) + \int_0^t m(t-s)dF(s)$$

的唯一局部解；

(2) 如果 $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) < \infty$，则有中心极限定理

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N_D(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}}\right) = \Phi(x),\ x \in (-\infty, \infty),$$

其中 $\Phi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的分布函数；

(3) 当 $t \to \infty$ 时，$\dfrac{N_D(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$ a.s.；

(4) 当 $t \to \infty$ 时，$\dfrac{m_D(t)}{t} \to \dfrac{1}{\mu}$；

(5) 如果 X 不是格点随机变量，则当 $t \to \infty$ 时，

$$m_D(t+a) - m_D(t) \to a/\mu;$$

(6) 设 X 和 X_1 是有相同周期 d 的格点随机变量，则

$$\lim_{n\to\infty}[m_D(nd)-m_D(nd-d)]=d/\mu;$$

(7) 设 X 不是格点随机变量，$\mu<\infty$，$h(x)$ 直接黎曼可积，则

$$\lim_{t}\to\infty\int_0^\infty h(t-x)dm_D(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(x)dx;$$

(8) 对 $t\geq x\geq 0$，$P(A_D(t)\geq x)=\overline{G}(t)+\int_0^{t-x}\overline{F}(t-s)dm_D(s)$；

(9) 对 $t,x\geq 0$，$P(R_D(t)>x)=\overline{G}(t+x)+\int_0^t\overline{F}(t-s+x)dm_D(s)$；

(10) 设 X 不是格点随机变量，则有

$$\lim_{t\to\infty}P(A_D(t)\leq x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x\overline{F}(s)ds,$$

$$\lim_{t\to\infty}P(R_D(t)\leq x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x\overline{F}(s)ds,$$

$$\lim_{t\to\infty}P(A_D(t)\leq x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x\overline{F}(s)ds;$$

(11) 设 X 不是格点随机变量，$E[X_1]<\infty$，$\sigma^2=\mathrm{Var}(X)<\infty$，则有

$$\lim_{t\to\infty}E[A_D(t)]=\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu},$$

$$\lim_{t\to\infty}E[R_D(t)]=\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu},$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(m_D(t)-\frac{t}{\mu}\right)=\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}-\frac{\mu_1}{\mu}.$$

例 13.6

如果 $Y_1,Y_2,\cdots$ 是来自总体 Y 的随机变量，

$$P(Y=y_j)=p_j,\ j\geq 1,$$

则 $Y_1,Y_2,\cdots$ 的轨迹 (或观测) 是以 $y_1,y_2,\cdots$ 为元素的无穷序列. 当关心字串 $y_1y_2\cdots y_r$ 出现的频率时，仍然认为在字串 $y_1y_2\cdots y_r$ 结束时有一个更新发生.

用 $N(n)$ 表示前 n 个信号中的更新次数，用 $[t]$ 表示 t 的整数部分，则 $\{N([t]),t\geq 0\}$ 是延迟更新过程. 更新在 $t=n$ 处发生的充分必要条件是 $\mathbf{Y}_n=\mathbf{y}_r$，其中

$$\mathbf{Y}_n=(Y_{n-r+1},Y_{n-r},\cdots,Y_n),\ \mathbf{y}_r=(y_1,y_2,\cdots,y_r).$$

于是

$$P(n\text{处有更新})=P(\mathbf{Y}_n=\mathbf{y}_r)=p_1p_2\cdots p_r,\ n\geq r,$$
$$P(n\text{处无更新})=1-p_1p_2\cdots p_r,\ n\geq r.$$

更新间隔 X_1, X_2 都是周期为 1 的格点随机变量. 于是

$$\begin{aligned}&P(n\text{处有更新})\\=&E[N_D(n)-N_D(n-1)]\\=&m_D(n)-m_D(n-1)\\\to&\frac{1}{EX_2}\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

于是得到平均等待间隔 $EX_1 = 1/(p_1p_2\cdots p_r)$，字串 $y_1y_2\cdots y_r$ 出现的频率 $f_0 = p_1p_2\cdots p_r$. 完全类似地可以得到对字符串 $y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_r}$ 的平均等待时间为

$$EX_2 = \frac{1}{p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_r}}.$$

于是字串 $y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_r}$ 出现的频率是 $f_0 = p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_r}$.

13.3 延迟开关系统

设 $\{N(t)\}$ 是以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的延迟更新过程，更新时刻 $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. 又设 (U_i, V_i) $(i = 2, 3, \cdots)$ 是来自总体 (U, V) 的随机变量，使得

$$X_j = U_j + V_j,\ U_j \ge 0,\ j = 2, 3, \cdots.$$

对于 $j \ge 1$，当 $t \in [S_j, S_j + U_{j+1})$ 时，称 t 时系统处于开状态；当 $t \in [S_j + U_{j+1}, S_{j+1})$ 时，称 t 时系统处于关状态. 则得到了一个有延迟的开关系统，简称**延迟开关系统**.

定理 13.7

对于 $\mu_U = E[U] < \infty$，$\mu_V = E[V] < \infty$，如果 $X = U + V$ 不是格点随机变量，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t\text{ 时开}) = \frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_V},$$
$$\lim_{t\to\infty} P(t\text{ 时关}) = \frac{\mu_V}{\mu_U+\mu_V}.$$

例 13.8

一部电话是一个开关系统，占线时关状态，占线时为开状态. 一个信息咨询台的 m 部电话相互独立地工作着，每部电话是一个分系统. 第 k 部电话的开状态有数学期望 μ_k，关状态有数学期望 λ_k. 当所有电话都占线时称咨询台处于关状态，否则称为开状态. 于是咨询台也构成了一个开关系统. 对于充分大的 t，计算 t 时刻是关状态的概率.

解. 本问题中，所有的更新间隔都是非格点随机变量. 用 $V_j(t)$ 表示第 j 部电话在 t 时处于关状态，利用定理 13.7 我们有

$$\lim_{t\to\infty} P(V_j(t)) = \frac{\lambda_j}{\mu_j+\lambda_j}.$$

对于咨询台来讲，当 t 充分大后，有

$$P(t\text{ 时关}) = P(\bigcap_{j=1}^m V_j(t)) = \prod_{j=1}^m P(V_j(t)) \approx \prod_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\mu_j+\lambda_j}.$$

□

在本问题中，子系统的并联构成了总系统，如果把 $\lim_{t\to\infty} P(t \text{ 时开})$ 称为稳定状态下总系统的**可靠度**，则

$$\lim_{t\to\infty} P(t \text{ 时开}) \approx 1 - \prod_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\mu_j + \lambda_j}.$$

13.4 有偿更新过程

用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的更新过程，如果在第 j 个更新间隔 X_j 结束时有更新费用 Y_j 发生，则在 $[0,t]$ 发生的总费用是

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j.$$

称 $\{M(t)|t \geq 0\}$ 为**有偿更新过程**.

以下假设 $(X_j, Y_j), (j = 1, 2, \cdots)$ 是来自总体 (X, Y) 的随机向量，

$$\frac{M(t)}{t}$$

是 $[0,t]$ 中的平均费用. 由于第一个更新间隔的费用对 $M(t)/t$ 的影响随着 t 的增加逐步耗尽，而每个更新间隔的平均费用是

$$\frac{E[Y]}{E[X]},$$

所以应当有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{E[Y]}{E[X]} \ a.s..$$

于是对于充分大的 t，时间段 $(t, t+a]$ 中的平均费用应当是

$$E[M(t+a) - M(t)] = a\frac{E[Y]}{E[X]}.$$

下面我们来严格证明这些结论.

定理 13.9

对于有偿更新过程 $\{N(t)\}$，设 $\mu_X = E[X] < \infty$. $\mu_Y = E[Y] < \infty$，a 是正常数，则

(1) $\lim_{t\to\infty} M(t)/t = \mu_Y/\mu_X$ a.s.;

(2) $\lim_{t\to\infty} E[M(t)]/t = \mu_Y/\mu_X$;

(3) 当 X 不是格点随机变量时，有

$$\lim_{t\to\infty} (E[M(t+a)] - E[M(t)]) = a\frac{\mu_Y}{\mu_X}.$$

证明. 利用 $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ a.s. 以及

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[X]} \ a.s., \ \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j}{N(t)} = E[Y] \ a.s.,$$

我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j = \frac{E[Y]}{E[X]} \ a.s.,$$

这就证明了 (1).

为了方便，只对 $\{Y_j\}$ 与 $\{X_j\}$ 独立的情况证明结论 (2) 和 (3). 因为更新过程 $\{N(t)\}$ 由更新间隔 $\{X_j\}$ 决定，与 $\{Y_j\}$ 独立，所以利用瓦尔德定理我们有

$$E[M(t)] = E[\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j] = E[N(t)]E[Y],$$

两边除以 t 后，利用基本更新定理可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[M(t)]}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{E[N(t)]}{t}E[Y] = \frac{E[Y]}{E[X]}.$$

这就证明了 (2).

又注意到

$$E[M(t+a)] - E[M(t)] = E[N(t+1)]E[Y] - E[N(t)]E[Y] = (m(t+a)-m(t))E[Y],$$

其中 $m(t) = E[N(t)]$ 是更新函数. 利用布莱克威尔定理可以得到结论 (3). □

推论 13.10

对于延迟开关系统，当 $\mu_U + \mu_V < \infty$ 时，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[0,t] \text{ 内的开状态时间长度}}{t} = \frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_V} \ a.s..$$

证明. 用 $U(t)$ 表示 $[0,t]$ 内的开状态时间长度，则关于有偿更新过程 $M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} U_j$ 有关系式

$$M(t) \le U(t) \le M(t) + U_{N(t)+1}.$$

因为当 $t\to\infty$ 时，

$$\frac{M(t)}{t} \to \frac{E[U]}{E[X]} = \frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_V} \ a.s.,$$

$$\begin{aligned}\frac{M(t)+U_{N(t)+1}}{t} &= \frac{N(t)+1}{t}\Big(\frac{1}{N(t)+1}\sum_{j=1}^{N(t)+1} U_j\Big) \\ &\to \frac{1}{E[X]}E[U] = \frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_V} \ a.s.,\end{aligned}$$

所以结论成立. □

例 13.11

在北京市区丢失自行车是司空见惯的事情. 一位职工每天骑自行车上下班，自行车丢失或损坏后马上用 Y 元购一辆新车继续使用. 设他靠骑车每周能节省 Z 元公交车费.

(1) 他平均多长时间更新一辆自行车才能保证汽车比乘车更省钱.

(2) 如果自行车的平均单价是 180 元，每周的平均乘车费是 15 元，平均每年更新一辆自行车，他每周平均能节省多少元？

解. 设 $(X_j, Y_j, Z_j)(j = 1, 2, \cdots)$ 是来自总体 (X, Y, Z) 的随机向量，其中 $\{X_j\}$ 表示自行车的更新间隔，单位是周；Y_j 是第 j 次更新自行车的费用，单位是元；Z_j 是第 j 周的乘车费，单位是元. 用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的更新过程. $[0,t]$ 周内购车的费用是

$$M(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j.$$

$[0,t]$ 周内的乘车费

$$Z(t)=\sum_{j=1}^{[t]}Z_j+(t-[t])Z_{[t]+1}.$$

于是 $[0,t]$ 内骑车节省费用 $Z(t)-M(t)$，每周节省的费用是

$$\frac{Z(t)-M(t)}{t}.$$

(1) 根据问题的背景知道所有随机变量的数学期望都存在. 在不等式

$$\sum_{j=1}^{[t]}Z_j\le Z(t)\le\sum_{j=1}^{[t]+1}Z_j$$

的各项同除以 t 后，利用强大数律得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Z(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{[t]}Z_j=EZ\ a.s..$$

于是该职工每周平均节省

$$M=\lim_{t\to\infty}\frac{Z(t)-M(t)}{t}=EZ-\frac{EY}{EX}.$$

于是，只有当 $EZ>EY/EX$ 时才能够省钱.

(2) 当 $EY=180$ 元，$EZ=15$ 元，$EX=365/7$ 周时，有

$$M=EZ-\frac{EY}{EX}=15-\frac{180\times 7}{365}=11.5479,$$

每周平均节省 11.55 元. □

例 13.12

设波音 737 飞机的使用寿命为服从分布 $G(s)$ 的一个随机变量 T (单位：年). 飞机购置费为 a 元，飞机在服役期间每年创造利润 b 元. 如果使用中飞机损坏，除了需要购置新飞机，还要承担额外损失 c 元. 为保险起见，航空公司决定飞机使用 s 年后就放弃不用，购置新的波音 737，长期实施以上策略，一架飞机每年平均贡献多少利润?

解. 我们用有偿更新过程解决这个问题. 设第 n 架飞机的使用寿命为 T_n 年，则这架飞机的实际使用年限为

$$X_n=\min(T_n,s).$$

放弃第 n 架飞机时的获利为

$$Y_n=\begin{cases}sb-a, & \text{当 } T_n>s,\\ T_nb-a-c, & \text{当 } T_n\le s.\end{cases}$$

用示性函数写出来就是

$$Y_n=(sb-a)I[T_n>s]+(T_nb-a-c)I[T_n\le s].$$

当 $T_1,T_2,\cdots$ 是来自总体 T 的随机变量时，(X_j,Y_j) 就是独立同分布的随机向量. 用 $\{N(t)\}$ 表示以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的更新过程，则在时间段 $[0,t]$ 中的获利为

$$M(t)=\sum_{j=1}^{N(t)}Y_j+A(t)b,$$

其中 $A(t) = t - S_{N(t)} \le s$. 于是很长时间后，一架飞机每年平均贡献的利润为

$$\frac{E[M(t)]}{t} \approx \frac{E[Y_1]}{E[X_1]}.$$

用 $G(x) = P(T \le x)$ 表示 T 的分布函数时，有

$$\begin{aligned} E[X_1] &= \int_0^\infty P(X_1 > x)dx = \int_0^\infty P(T_1 > x, s > x)dx \\ &= \int_0^s P(T_1 > x)dx = \int_0^s \overline{G}(x)dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y_1] &= (sb-a)E(I[T_n > s]) + bE(T_n I[T_n \le s]) - (a+c)E(I[T_n \le s]) \\ &= (sb-a)\overline{G}(s) + b\int_0^s x dG(x) - (a+c)G(s). \end{aligned}$$

于是一架飞机平均每年贡献的利润为

$$h(s) = \frac{(sb-a)\overline{G}(s) + b\int_0^s x dG(x) - (a+c)G(s)}{\int_0^s \overline{G}(x)dx}.$$

要想得到最大利润，只要取 s 为 $h(s)$ 的最大值点即可. □

例 13.13

某车站的乘客按照更新间隔时间均值为 μ 的更新过程到达. 车站当乘客数量达到 x 时发一班车. 当有 n 个乘客等候时，候车室会产生每小时 cn 元的费用. 给出候车室的长程平均费用计算公式. 设每开出一班车，车站会产生 a 元的费用. 给出车站长程平均费用计算公式. 问 x 取何值时车站的长程平均费用最低?

解. 用 T_n 表示第 n 位与第 $n+1$ 位乘客到达的间隔时间. 根据假设我们有 $E[T_n] = \mu$. 在此模型中，每发出一班车就称完成了一次循环. 用 ξ_1 表示第一班车发车的时刻，则每次循环的期望时间为 $E[\xi_1] = x\mu$. 用 η_1 表示到第一班车发车时候车室的费用. 则 $\eta_1 = c[T_1 + 2T_2 + \cdots + (x-1)T_{x-1}]$，故在每个循环中候车时的期望费用为

$$E[\eta_1] = c\mu[1 + 2 + \cdots + (x-1)] = \frac{1}{2}c\mu x(x-1).$$

所以候车室的长程费用为

$$f(x) = \frac{E[\eta_1]}{E[\xi_1]} = \frac{c\mu x(x-1)}{2\mu x} = \frac{1}{2}c(x-1).$$

车站的长程平均费用为

$$g(x) = \frac{a + c\mu x(x-1)/2}{\mu x} = \frac{2a + c\mu x(x-1)}{2\mu x}.$$

对上式求导我们有

$$g'(x) = \frac{2c\mu^2 x(2x-1) - 4a\mu - 2c\mu^2 x(x-1)}{(2\mu x)^2} = \frac{2c\mu^2 x^2 - 4a\mu}{(2\mu x)^2}.$$

令 $g'(x) = 0$，得 $c\mu x^2 - 2a = 0$. 该方程的解为

$$x = \sqrt{2a/c\mu}.$$

所以，取 x 为 $[\sqrt{2a/c\mu}]$ 和 $[\sqrt{2a/c\mu}] + 1$ 两者中代入 g 中取值更小的那一个，此时车站的长程平均费用最低. □

13.5 习题

习题 13.1

生产线按顺序生产某种产品，且每件产品合格的概率为 p $(0 < p < 1)$. 执行以下的抽检方案：开始时逐一检查每件产品，直到连续出现 k 件合格品，之后以概率 α $(0 < \alpha < 1)$ 检查每件产品，直到查出不合格品，此时一个循环结束. 接着重新开始逐一检查每件产品，如此循环下去. 求长时间看被检查产品所占的比例.

第 14 讲　第二部分总结：更新过程

14.1 课程第一部分总结

14.2 例子

例 14.1

设更新过程 $(N(t): t \geq 0)$ 的更新间隔时间序列 $\{X_n\}$ 取正整数值. 记 $A_n = \{$在时刻 n 发生更新$\}$. 证明：如果极限 $a := \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ 存在，则有 $a = 1/E(X_1)$.

证明. 注意到时刻 n 为止的更新次数为 $N(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$. 因此，

$$m(n) = E[N(n)] = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

由于极限 $a := \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ 存在，我们知 $m(n)/a \to a$. 由基本更新定理 $m(n)/n \to 1/E(\xi_1)$，所以 $a = 1/E(\xi_1)$. □

第 15 讲　马氏链及其转移概率

15.1　马氏链

定义 15.1

设 $\{X_n\}$ 是一个在 I 中取值的随机序列，如果对任意正整数 n 和 $i, j, i_0, i_1, \cdots, i_{n-1} \in I$，有

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= P(X_i = j | X_0 = i),\ i, j \in I, \end{aligned}$$

则称 $\{X_n\}$ 为**时齐的马尔可夫链**，简称为**马氏链**. 这时称

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i),\ i, j \in I$$

为马氏链 $\{X_n\}$ 的**转移概率**，称矩阵

$$P = (p_{ij}) = (p_{ij})_{i,j \in I}$$

为马氏链 $\{X_n\}$ 的**一步转移概率矩阵**，简称为**转移矩阵**.

由于 $\{X_1 = j\}(j \in I)$ 是完备事件组，所以有

$$\sum_{j \in I} p_{ij} = \sum_{j \in I} P(X_1 = j | X_0 = i) = P(\bigcup_{j \in I} \{X_1 = j\} | X_0 = i) = 1.$$

于是转移矩阵 P 的各行之和等于 1，这样的矩阵也被称为**随机矩阵**.

15.2　马氏链的基本性质

对于马氏链的直观理解是：已知现在的状态，将来与过去相独立. 人们习惯地称这种性质为 **马氏性**.

定理 15.2

对于事件 A, B, C，当 $P(AB) > 0$，条件

$$P(C|BA) = P(C|B)$$

与条件

$$P(AC|B) = P(A|B)P(C|B)$$

等价.

证明. 引入条件概率 $P_B(\cdot) = P(\cdot|B)$，我们知上面两个等式分别等价于 $P_B(C|A) = P_B(C)$ 和 $P_B(AC) = P_B(A)P_B(C)$. 这两个公式都表示对于概率 P_B 来说，A 和 C 独立，所以它们等价. □

根据上述定理，$P(C|BA) = P(C|B)$ 等价于已知 B 发生时，C 和 A 独立. 于是，$\{X_n\}$ 有马氏性的充分必要条件是对于任意 $n \geq 1$，已知现在 $B = \{X_n = i\}$，将来 $C = \{X_{n+1} = j\}$ 与过去 $A = \{X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0\}$ 独立.

例 15.3: 两状态马尔可夫链

状态空间为 $\{0,1\}$，转移概率为 $p_{01}=1-p_{00}=p$，$p_{10}=1-p_{11}=q$. 转移矩阵可以表示如下：

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{array}$$

该马尔可夫链可以用来作为一个描述电话状态的简单模型，其中 $X_n=0$ 表明电话在时刻 n 空闲，$X_n=1$ 表明电话在时刻 n 繁忙. 我们假设在每个时间间隔内有一个电话打进的概率为 p（为了方便起见，假定在任意一个特定时间的时间间隔内至多有一个电话打进）. 当电话繁忙时，来到的呼叫无法进入系统. 我们还假设前一段时间间隔内忙的电话在下一时间间隔内空闲的概率为 q.

例 15.4

设想一个质点在直线的整数点上作**简单随机游动**：质点一旦到达某状态后，下次向右移动一步的概率是 p，向左移动一步的概率是 $q=1-p$，$pq>0$. 现在用 X_0 表示质点的初始状态，用 X_n 表示质点在时刻 n 的状态，则 $\{X_n\}$ 是马氏链，并且

$$\begin{cases} p_{i,i-1}=P(X_{n+1}=i-1|X_n=i)=q, \\ p_{i,i+1}=P(X_{n+1}=i+1|X_n=i)=p. \end{cases}$$

例 15.5: 两端是吸收壁的简单随机游动

设质点在状态 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中按上例的规律做简单随机游动，但是质点一旦到达状态 n 或状态 0 后将永远停留在 n 或 0. 用 X_0 表示质点的初始状态，用 X_n 表示质点在时刻 n 的状态，则 $\{X_n\}$ 是马氏链，并且

$$p_{ij}=\begin{cases} q, & 1\le i\le n-1,\ j=i-1, \\ p, & 1\le i\le n-1,\ j=i+1, \\ 1, & (i,j)=(0,0)\text{或 } (i,j)=(n,n), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

相应的转移概率矩阵是

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

例 15.6: 两端是吸收壁的简单随机游动

设质点在状态 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中按上例的规律做简单随机游动，但是质点到达状态 n 后下一步一定返回 $n-1$，到达状态 0 后下一步一定返回状态 1. 用 X_0 表示质点的初始状态，用 X_n 表示

质点在时刻 n 的状态，则 $\{X_n\}$ 是马氏链，并且

$$p_{ij}=\begin{cases} q, & 1\le i\le n-1,\ j=i-1, \\ p, & 1\le i\le n-1,\ j=i+1, \\ 1, & (i,j)=(0,1)\text{或 }(i,j)=(n,n-1), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

相应的转移概率矩阵是

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

下面的定理提供了一个非常有用的获得马尔可夫链的方法，并可用于检验一随机过程是否为马尔可夫链.

定理 15.7

设随机过程 $\{X_n:n\ge 0\}$ 满足：

(1) $X_n=f(X_{n-1},\xi_n)(n\ge 1)$，其中 $f:S\times S\to S$，且 ξ_n 取值在 S 上，

(2) $\{\xi_n:n\ge 1\}$ 为独立同分布随机变量，且 X_0 与 $\{\xi_n:n\ge 1\}$ 也相互独立，

则 $\{X_n,n\ge 0\}$ 是马尔可夫链，而且其一步转移概率为

$$p_{ij}=P(f(i,\xi_1)=j).$$

证明. 设 $n\ge 1$，注意到 ξ_{n+1} 与 $X_0,X_1,\cdots,X_n$ 相互独立（这是因为 X_i 是 $X_0,\xi_1,\cdots,\xi_i$ 的函数），有

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n) &= P(f(X_n,\xi_{n+1})=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n) \\ &= P(f(i_n,\xi_{n+1})=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n) \\ &= P(f(i_n,\xi_{n+1})=i_{n+1}). \end{aligned}$$

同样地，

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)=P(f(X_n,\xi_{n+1})=i_{n+1}).$$

因此

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n)=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n).$$

从而 $\{X_n,n\ge 0\}$ 是马尔可夫链，且其转移概率为 $p_{ij}=P(f(i,\xi_1)=j)$. □

为了更方便地研究马氏链的性质，有必要回忆条件概率的基本公式. 设 $P(AB)>0$，则

$$P_A(C|B)=P(C|BA).$$

如果 $P(A)>0$，事件 B_k 互不相容使得 $C\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$，则有全概率公式

$$P(C|A)=\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k|A)P(C|B_kA).$$

定理 15.8

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间，$A, A_j \subset I$，则有

(1) 已知 $X_n = i$ 的条件下，将来 $\{X_m; m \geq n+1\}$ 与过去 $\{X_j; j \leq n-1\}$ 独立;

(2) $P(X_{n+k} = j | X_n = i) = P(X_k = j | X_0 = i)$;

(3) $P(X_{n+k} = j | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \cdots, X_0 \in A_0) = P(X_k = j | X_0 = i)$;

(4) $P(X_{n+k} \in A | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \cdots, X_0 \in A_0) = P(X_k \in A | X_0 = i)$.

证明. 对于任何 $m > n \geq 1$ 和 I 中的 $i_0, i_1, \cdots, i_m$，引入 $B_k = \{X_k = i_k\}$, $k = 0, 1, \cdots, m$，则有

$$\begin{aligned}
A &:= \{X_m = i_m, X_{m-1} = i_{m-1}, \cdots, X_{n+1} = i_{n+1}\} \\
&= B_m B_{m-1} \cdots B_{n+1}, \\
C &:= \{X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \cdots, X_0 = i_0\} \\
&= B_{n-1} B_{n-2} \cdots B_0,
\end{aligned}$$

下面证明已知现在 $B = \{X_n = i_n\} = B_n$ 后，将来 A 与过去 C 独立. 用乘法公式和马氏性得到

$$\begin{aligned}
P(ABC) &= P(B_0 B_1 \cdots B_m) \\
&= P(B_0) P(B_1 | B_0) P(B_2 | B_1) \cdots P(B_m | B_{m-1}) \\
&= P(B_m | B_{m-1}) P(B_{m-1} | B_{m-2}) \cdots P(B-1 | B_0) P(B_0).
\end{aligned}$$

同理有

$$P(BC) = P(B_0 B_1 \cdots B_n) = P(B_n | B_{n-1}) P(B_{n-1} | B_{n-2}) \cdots P(B_1 | B_0) P(B_0).$$

对 $k > n$ 注意使用 $P(B_{k+1} | B_k) = P(B_{k+1} | B_k B_{k-1} \cdots B_n)$ 就得到

$$\begin{aligned}
P(A | BC) &= \frac{P(ABC)}{P(BC)} \\
&= P(B_n | B_{m-1} \cdots B_n) P(B_{m-1} | B_{m-2} \cdots B_n) \cdots P(B_{n+1} | B_n) \\
&= P(B_m B_{m-1} \cdots B_{n+1} | B_n) = P(A | B).
\end{aligned}$$

从而 (1) 成立.

下面我们用归纳法来证明 (2). 由马氏链的定义我们知对 $k = 1$ 以及任意 n 结论成立. 设结论对 $k-1$ 以及任意 n 成立，用 (1) 中的结论以及全概率公式我们有

$$\begin{aligned}
P(X_{n+k} = j | X_n = i) &= \sum_{i \in I} P(X_{n+k} = j | X_{n+k-1} = l, X_n = i) P(X_{n+k-1} = l | X_n = i) \\
&= \sum_{i \in I} P(X_k = j | X_{k-1} = l, X_0 = i) P(X_{k-1} = l | X_0 = i) \\
&= P(X_k = j | X_0 = i).
\end{aligned}$$

由 (1) 和 (2) 我们可得 (3) 和 (4). □

15.3 K-C 方程

对于马氏链 $\{X_n\}$，我们知道 $P(X_{k+n} = j | X_n = i)$ 和 n 无关，所以对 $i, j \in I$ 定义

$$P_{ij}^{(0)} = P(X_0 = j | X_0 = i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$P_{ij}^{(k)} = P(X_{n+k} = j | X_n = i) = P(X_k = j | X_0 = i),$$

并且称 $p_{ij}^{(k)}$ 为 $\{X_n\}$ 的 k **步转移概率**，称矩阵

$$p^{(k)} = (p_{ij}^{(k)})$$

为 $\{X_n\}$ 的 k 步转移概率矩阵，简称为 k **步转移矩阵**. 这时，

$$P^{(1)} = P,\ P^{(0)} = \text{单位阵}.$$

下面的柯尔莫哥洛夫-切普曼 (Kolmogorov-Chapman) 方程 (简称 K-C 方程) 告诉我们从一部转移概率矩阵 P 计算 k 步转移概率矩阵 $P^{(k)}$ 的方法.

定理 15.9: (K-C 方程)

对任意 $m, n \geq 0$，有

$$\begin{cases} p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \\ P^{(n+m)} = P^{n+m}. \end{cases} \tag{15.1}$$

证明. 由定理 15.8 我们有

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in I} P(X_n = k | X_0 = i) P(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \end{aligned}$$

写成矩阵的形式，我们得到 $P^{(n+m)} = P^{(n)} p^{(m)}$. 由 n, m 的任意性得到

$$P^{(n+m)} = PP^{(n+m-1)} = P^2 P^{(n+m-2)} = \cdots = P^{n+m}.$$ □

推论 15.10

对于正整数 $n, m, k, n_1, n_2, \cdots, n_k$ 和状态 i, j, l 总有

(1) $p_{ij}^{(n+m)} \geq p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)}$；

(2) $p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jl}^{(k)} p_{li}^{(m)}$；

(3) $p_{ii}^{(n_1+n_2+\cdots+n_k)} \geq p_{ii}^{(n_1)} p_{ii}^{(n_2)} \cdots p_{ii}^{(n_k)}$；

(4) $p_{ii}^{(nk)} \geq (p_{ii}^{(n)})^k$.

证明. 利用 K-C 方程我们有

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{s\in I} p_{is}^{(n)} p_{sj}^{(m)} \geq p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)},$$

从而 (1) 得证. 两次利用 (1) 我们有

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{il}^{(n+k)} p_{li}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jl}^{(k)} p_{li}^{(m)},$$

于是 (2) 成立. 在 (1) 中取 $j = i$ 并应用归纳法我们可以得到 (3). 在 (3) 中取 $n_i = n$ 我们就得到 (4). □

例 15.11

考虑两状态的马尔可夫链所描述的电话状态模型，假定电话在时刻 0 时空闲. 设 $p=\frac{1}{4}$，$q=\frac{1}{6}$，令 $n=6$，则

$$\mathbf{P}^6=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}0.424 & 0.576\\ 0.384 & 0.616\end{pmatrix}.$$

如果电话在 0 时刻空闲，想要知道在此条件下，电话在时刻 6 繁忙的概率，我们可以计算

$$p_{01}^{(6)}=0.576$$

即可.

15.4 初始分布和 X_n 的分布

设 $\{X_n\}$ 的一步转移概率矩阵是 P，X_0 有概率分布

$$\pi_j=P(X_0=j),\ j\in I.$$

称 X_0 的分布列 (认为 $I=\{1,2,\cdots\}$)

$$\boldsymbol{\pi}^{(0}=[\pi_1,\pi_2,\cdots]$$

为 $\{X_n\}$ 的**初始分布**，它表明了质点在初始状态的分布情况. 再引入 X_n 的概率分布

$$\pi_j^{(n)}=P(X_n=j),\ j\in I$$

和

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)}=[\pi_1^{(n)},\pi_2^{(n)},\cdots],$$

则 $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ 表明质点在 n 时刻所处状态的分布.

定理 15.12

设马氏链 $\{X_n\}$ 有初始分布 $\boldsymbol{\pi}^{(0)}=[\pi_1,\pi_2,\cdots]$ 和转移概率矩阵 $P=(p_{ij})$.

(1) 对于 $n_0<n_1<\cdots<n_m$，有

$$P(X_{n_0}=i_0,X_{n_1}=i_1,\cdots,X_{n_m}=i_m)=\pi_{i_0}^{(n_0)}p_{i_0i_1}^{(n_1-n_0)}p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}\cdots p_{i_{m-1}i_m}^{(n_m-n_{m-1})};$$

(2) 对 $n\geq 1$，有

$$\begin{cases}\pi_j^{(n)}=\sum_{i\in I}\pi_i p_{ij}^{(n)},\\ \boldsymbol{\pi}^{(n)}=\boldsymbol{\pi}^{(k)}P^{(n-k)},\quad 0\leq k\leq n.\end{cases}$$

证明. (1) 利用概率的乘法公式我们有

$$\begin{aligned}&P(X_{n_0}=i_0,X_{n_1}=i_1,\cdots,X_{n_m}=i_m)\\ =&P(X_{n_0}=i_0)P(X_{n_1}=i_1|X_{n_0}=i_0)\cdots P(X_{n_m}=i_m|X_{n_{m-1}}=i_{m-1})\\ =&\pi_{i_0}^{n_0}p_{i_0i_1}^{(n_1-n_0)}p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}\cdots p_{i_{m-1}i_m}^{(n_m-n_{m-1})}.\end{aligned}$$

(2) 用全概率公式我们可以得到，当 $n \geq 1$ 时，

$$\begin{aligned}\pi_j^{(n)} &= P(X_n = j) \\ &= \sum_{i \in I} P(X_0 = i)P(X_n = j|X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}.\end{aligned}$$

写成矩阵的形式就得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}^{(n)} &= \boldsymbol{\pi}^{(0)}P^{(n)} = [\boldsymbol{\pi}^{(0)}P^{(1)}]P^{(n-1)} \\ &= \boldsymbol{\pi}^{(1)}P^{(n-1)} = \cdots = \boldsymbol{\pi}^{(k)}P^{(n-k)}.\end{aligned}$$

□

极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 表示质点从 X_0 出发后，在充分远的将来处于状态 j 的概率.

考虑直线上的简单随机游动. 如果 $p > q$，无论质点从哪里出发，随着时间的推移向右越跑越远. 直观上应该有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

再考虑两端带有吸收壁的简单随机游动. 状态 0，n 和 $\{1, \cdots, n-1\}$ 中的状态有明显的不同. 直观上质点不可能永远在 $\{1, \cdots, n-1\}$ 中转移，所以有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n-1.$$

15.5 习题

习题 15.1

重复地掷一枚硬币，抛掷结果为 $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots$，它们取值为 0 或 1 的概率均为 1/2. 用 $X_n = Y_n + Y_{n-1} (n \geq 1)$ 表示第 $(n-1)$ 次和第 n 次抛掷出的结果中 1 的个数. X_n 是一个 Markov 链吗？

第 16 讲 状态命名和周期

16.1 状态的互通性

定义 16.1

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态.

(1) 如果 $p_{ii} = 1$，则称 i 是**吸引状态**；

(2) 如果存在 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$，则称 i **通** j，记做 $i \to j$；

(3) 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$，则称 i, j **互通**，记做 $i \leftrightarrow j$.

$i \to j$ 表示质点从 i 出发以正概率到达 j. i，j 互通表明质点从 i 到 j 后，以正概率回到 i，反之亦然.

例 16.2

对于两端是吸收壁的简单随机游动，状态 0 和 n 都是吸引状态.

命题 16.3

设 I 是马氏链 $\{x_n\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态. 则 $i \to j$ 当且仅当

$$P_i(\text{存在 } n \geq 0 \text{ 使得 } X_n = j) > 0.$$

证明. 注意到

$$p_{ij}^{(n)} \leq P_i(\text{存在 } n \geq 0 \text{ 使得 } X_n = j) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)},$$

可知上面两个条件等价. □

命题 16.4

如果 $i \leftrightarrow j$，那么 $j \leftrightarrow i$.

命题 16.5

如果 $i \to j$ 且 $j \to k$，则 $i \to k$.

证明. 如果 $i \to j$ 且 $j \to k$，则存在 n, m 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$，用推论 15.10 我们有

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

于是 $i \to k$. □

16.2 常返与非常返态

对于马氏链 $\{X_n\}$，引入条件概率

$$f_{ij}^{(1)} = P(X_1 = j | X_0 = i),$$

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j; 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i),\ \ n \geq 1.$$

$f_{ij}^{(n)}$ 是质点从 i 出发的条件下，第 n 步首次到达 j 的概率，称为从 i 出发后第 n 步首达 j 的概率，简称为**首达概率**.

由于对不同的 n，事件

$$A_1 = \{X_1 = j\},\ \ A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1\} \tag{16.1}$$

互不相容，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 发生表示质点到达过状态 j，所以

$$f_{ij}^* := P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1.$$

f_{ij}^* 是质点从 i 出发的条件下到达过 j 的概率，简称从 i 出发后到达 j 的概率.

定义 16.6

如果 $f_{ii}^* = 1$，则称 i 是**常返状态**. 如果 $f_{ii}^* < 1$，则称 i 是**非常返态**.

按照定义，吸引状态满足 $f_{ii}^* = f_{ii}^{(1)} = 1$，因而是常返状态. 当 i 是常返状态时，质点从 i 出发后，在实际中必然回到 i，再从 i 出发，再回到 i，因而回到 i 无穷次. i 是非常返态表明质点从 i 出发后，以正概率不能回到 i，因而只能回到 i 有限次，然后永远离开状态 i.

定理 16.7

$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$.

证明. 设 A_n 由 (16.1) 定义，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j，所以 $\{X_n = j\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. 于是应用全概率公式，我们有：

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k | X_0 = i) P(X_n = j | A_k, X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

□

引理 16.8

(1) 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛，则

$$\lim_{s \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a.$$

(2) 如果 $a_k \geq 0$ 且 $\lim_{s \to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a \leq \infty$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{N} a_k = a.$$

定理 16.9

对于马氏链 $\{X_n\}$ 以及 $\{p_{ii}^{(n)}\}$，$f_{ii}^{(n)}$，有以下结果：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{(1-f_{ii}^{*})}$；

(2) i 是常返状态的充分必要条件是 $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$；

(3) 如果 i 是常返状态，$i \to j$，则 $i \leftrightarrow j$，并且 j 也是常返的.

证明. 在定理 16.7 中取 $j = i$，两边再同时乘以 ρ^n，对 $n \geq 1$ 我们有

$$\rho_{ii}^{(n)}\rho^n = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k},\ \ \rho \in (0,1).$$

上式两边对 n 求和得到

$$\begin{aligned}
G(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\rho^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\rho^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)}\rho^k p_i i^{(n-k)}\rho^{n-k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} f_{ii}^{(k)}\rho^k p_i i^{(n-k)}\rho^{n-k} \\
&= 1 + (\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}\rho^k)(\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}\rho^n) \\
&= 1 + F(\rho)G(\rho),
\end{aligned}$$

其中 $F(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}\rho^k$. 于是得到

$$G(\rho) = 1/[1 - F(\rho)].$$

令 $\rho \to 1-$ 由引理 16.8 就得到结论 (1).

结论 (2) 是结论 (1) 的直接推论.

下面证明结论 (3). 首先我们证明 $i \leftrightarrow j$. 因为 $i \to j$，可见自 i 出发，最终要到达 j，而且中间不经过 i 的概率应大于 0；因此，必存在 $N(>0)$，使自 i 出发，于第 N 步初次到达 j，而且中间不经过 i 的概率 $f_{i,ij}^{(N)} > 0$. 下面我们证明 $f_{ji}^{*} = 1$，于是 $j \to i$. 若设 $f_{ji}^{*} < 1$，则自 i 出发，不回到 i 的概率至少为 $f_{i,ij}^{(N)}(1 - f_{ji}^{*}) > 0$，此与 i 为常返的假设矛盾.

再证明 j 是常返的. 设 n, m 使得 $p_{ji}^{(m)}p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任意 $k \geq 1$，我们有

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)}p_{ii}^{(k)}p_{ij}^{(n)}.$$

两边对 k 求和我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)}p_{ij}^{(n)}\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

由 (2) 知道 j 是常返的. □

16.3 正常返与零常返状态

记

$$T_i = \begin{cases} \min\{n|X_n = i; n \geq 1\}, & \text{当 } \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X_n = i\} \text{ 发生}, \\ \infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

对于马氏链 $\{X_n\}$，T_i 是质点首次到达状态 i 时的转移次数. $T_i = n$ 表示质点第 $n(\geq 1)$ 次转移首次到达状态 i.

引入条件概率 $P_i(\cdot) = P(\cdot|X_0 = i)$，则

$$f_{ii}^{(n)} = P_i(T_i = n) = P(T_i = n|X_0 = i)$$

是把质点从 i 出发的条件下，第 n 步首次回到 i 的概率. 当 $f_{ii}^{*} = 1$ 时，则 $P_i(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$. 在条件 $X_0 = i$ 时，T_i 的数学期望

$$\mu_i = E[T_i|X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} nP_i(T_i = n) = \sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)}. \tag{16.2}$$

μ_i 是质点返回状态 i 所需要的平均转移次数，称 μ_i 为状态 i 的**平均回转时间或期望回转时间**. 平均回转时间 μ_i 越小，表明质点返回 i 越频繁. 当 $\mu_i = \infty$，说明质点平均转移无穷次才能回到 i.

定义 16.10

设 i 是常返状态. 如果 i 的回转时间 $\mu_i < \infty$，则称 i 是**正常返**状态. 如果 i 的回转时间 $\mu_i = \infty$，则称 i 是**零常返**状态.

定理 16.11

设 i 是常返状态，则

(1) i 是零常返状态的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$；

(2) 当 i 是零常返的，$i \to j$ 时，j 也是零常返的；

(3) 当 i 是正常返的，$i \to j$ 时，j 也是正常返的.

证明. 下面证明 (2). 由定理 16.9 (3) 我们知 $i \leftrightarrow j$. 设正整数 m, n 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$，于是

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(m)}.$$

由 $p_{ii}^{(n)} \to 0$，我们有

$$\lim_{k\to\infty} p_{jj}^{(k)} \leq \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}} \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(n+k+m)} = 0.$$

这说明 j 是零常返的. 由 (2) 可得到 (3). □

命题 16.12

如果 j 不是正常返的，则对任意状态 i，有

$$p_{ij}^{(n)} \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时}.$$

证明. 对非常返的 j，由定理 16.9 (2) 我们有 $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$，从而 $p_{jj}^{(n)} \to 0$. 对零常返的 j，利用定理 16.11 我们有 $p_{jj}^{(n)} \to 0$. 对任意状态 i，我们有

$$
\begin{aligned}
p_{(ij)}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)}
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$，右方的第一项 $\sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} \to 0$，于是得到

$$
\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}.
$$

因为 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \leq 1$，所以再令 $m \to \infty$ 我们就得到结论. □

上面命题说明，只要 j 不是正常返的，从任何 i 出发，较长的时间后，质点位于 j 的概率非常小.

16.4 周期及其性质

对于一般的马氏链 $\{X_n\}$，定义状态 i 的周期如下：

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$，则质点从 i 出发不可能再回到 i，这时称 i 的周期是 ∞.

(2) 设 d 为正整数，质点从 i 出发，如果只可能在 d 的整数倍上回到 i，而且 d 是具有此性质的最大正数，则称 i 的周期是 d;

(3) 如果 i 的周期为 1，则称 i 是**非周期**的.

其中的 (2) 说明，称状态 i 的周期是 d，如果 $p_{ii}^{(n)} > 0$，则必有 $n = md$，并且 d 是满足此性质最大的整数. 但当 i 的周期 $d < \infty$ 时，$p_{ii}^{(nd)} > 0$ 也不必对所有的 n 成立，但至少对某个 n 成立.

例 16.13

在直线上，如果质点每次向前、向后移动 1 步的概率都是 1/3，向后移动 2 步的概率也是 1/3，则每个状态都是非周期的.

证明. 易见

$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(2)} &\geq p_{i,i+1} p_{i+1,i} > 0, \\
p_{ii}^{(3)} &\geq p_{i,i_2} p_{i-2,i-1} p_{i-1,i} > 0,
\end{aligned}
$$

于是从 $2 = nd, 3 = md$ 得到 $d = 1$. i 的周期是 $d = 1$，i 是非周期的. □

例 16.14

在直线上，如果质点每次向前移动 1 步的概率都是 p，向后移动 5 步的概率都是 $q = 1 - p$，$pq > 0$，则每个状态的周期都是 6.

证明. 质点从 i 出发，经过 n 次转移回到 i 时，我们说明 $n = 6m$. 设质点向前一共移动了 k 次，向后一共移动了 m 次，根据题意得到 $k = 5m$. 于是质点移动的次数 $n = k + m = 5m + m = 6m$. 又由于 $p_{ii}^{(6)} > p^5 q > 0$，所以状态 i 的周期是 $d = 6$. □

以后总用 d_i 表示 i 的周期. 下面的定理给出了周期 d_i 的数字描述.

定理 16.15

若状态 i 的周期 $d_i < \infty$，则

(1) d_i 是数集 $B_i = \{n|p_{ii}^{(n)} > 0, n \geq 1\}$ 的最大公约数；

(2) 如果 $i \leftrightarrow j$，则 $d_i = d_j$；

(3) 存在正数 N_i 使得当 $n \geq N_i$ 时，$p_{ii}^{(nd_i)} > 0$.

证明. (1) 由定义直接可得.

(2) 设正整数 m, n 使得 $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任意 $k \in B_i = \{k|p_{ii}^{(k)} > 0, k \geq 1\}$，利用推论 15.10 我们有

$$p_{jj}^{(m+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0,$$

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

于是 d_j 整除 $m+n$ 和 $m+k+n$，于是 $k|(m+k+n)-(m+n)$，于是整除 B_i 中的所有元，从而得到 d_j 整除 d_i. 对称地我们可以得到 d_i 整除 d_j，所以 $d_i = d_j$.

(3) 设 (1) 中的 $B_i = \{n_1, n_2, \cdots\}$，$l_m$ 是子集 $\{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$ 的最大公约数，则 d_i 是 l_m 的约数，且 l_m 单调不增收敛到 d_i. 因为 l_m 是整数，所以有 k 使得 $d_i = l_k$ 是 $\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ 的最大公约数. 根据数论的基本知识知道存在 N_i，使得只要 $n \geq N_i$，就有

$$nd_i = n_1 m_1 + \cdots + n_k m_k,\ m_i\text{是非负整数}.$$

再利用推论 15.10 我们有

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(nd_i)} &\geq p_{ii}^{(n_1 m_1)} p_{ii}^{(n_2 m_2)} \cdots p_{ii}^{(n_k m_k)} \\ &\geq [p_{ii}^{(n_1)}]^{m_1} [p_{ii}^{(n_2)}]^{m_2} \cdots [p_{ii}^{(n_k)}]^{m_k} > 0. \end{aligned}$$ □

16.5 遍历状态

定义 16.16

如果状态 i 是正常返和非周期的，则称 i 是**遍历状态**.

定理 16.17

设常返状态 i 有周期 d_i 和平均回转时间

$$\mu_i = E[T_i|X_0 = i],$$

则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_i}.$$

上面定理表明，质点从常返状态 i 出发后，对于充分大的 n，质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比，与回转时间 μ_i 成反比.

根据本讲中的讨论，对于常返状态 i，如果 $i \to j$，i 的性质就会传递给 j：这时有 $j \leftrightarrow i$；$d_j = d_i$；$\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$；当 $n \to \infty$ 时，$p_{jj}^{(n)}$ 的充分必要条件是 $p_{ii}^{(n)} \to 0$. 这些结果说明

$i \leftrightarrow j$ 时，j 是正常返状态的充分必要条件为 i 是正常返状态；j 是遍历状态的充分必要条件为 i 为遍历状态.

如果 i 是非常返状态，从 $i \to j$ 我们还不能得到关于 j 的更多信息. 这时 j 可以是常返的 (参考两边是吸收壁的简单随机游动中的 0 或 n)，也可以是非常返的 (参考两边是吸收壁的简单随机游动中的 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$).

命题 16.18

对于常返状态 j，有

(1) $\mu_j \geq 1$；

(2) 当 $i \to j$ 时，质点从 i 出发以概率 1 到达 j：

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1;$$

(3) 当 j 是遍历状态，$i \leftrightarrow j$ 时，有

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j := 1/\mu_j.$$

证明. (1) 由 (16.2) 我们知

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1.$$

(2) 实际上在定理 16.9 (3) 的证明过程中我们已经证明了这一点.

(3) 遍历状态的周期是 1，所以用定理 16.17 我们有

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n \to \infty} p_{jj}^{(n)} \in (0, 1].$$

对于 $1 \leq m \leq n$，我们有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

令 $n \to \infty$ 时，右边第一项收敛到 $\sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j$，第二项极限不超过 $b_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$，于是得到

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} \pi_j + O(b_m).$$

再令 $m \to \infty$，注意到 $b_m \to 0$ 并利用 (2) 我们知结论成立. □

16.6 习题

习题 16.1

若马尔可夫链 $\{X_n\}$ 的状态数为 n，且从状态 i 可达状态 j，证明从状态 i 出发在 n 或更少的步数内可达状态 j.

第 17 讲　状态空间的分解，简单随机游动的常返性

17.1　状态空间的分解

定义 17.1

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间，$i \in I$. 把和 i 互通的状态放在一起，得到集合

$$C = \{j | j \leftrightarrow i, j \in I\}.$$

(1) 称 C 是一个**等价类**;

(2) 如果 I 是一个等价类 (所有状态互通)，则称马氏链 $\{X_n\}$ 或状态空间 I **不可约**;

(3) 设 B 是 I 的子集，如果质点不能从 B 中的状态到达 $B^c = I - B$ 中的状态，则称 B 是**闭集**.

我们知道如果等价类 C 中有一个常返状态，则 C 中的一切状态都是常返的，这时称 C 是**常返等价类**.

定理 17.2

设 C 是一个等价类，则有以下结果：

(1) 不同的等价类互不相交.

(2) C 中的状态有相同的类型：或都是正常返的，或都是零常返的，或都是非常返的. 在任何情况下，C 中的状态有相同的周期.

(3) 常返等价类是闭集：质点不能走出常返等价类.

(4) 零常返等价类含有无穷个状态.

(5) 非常返等价类如果是闭集，则含有无穷个状态.

证明. 设 C 和 C_1 都是等价类，如果有 $i \in C \cap C_1$，由互通的传递性我们知 i 和 $C \cup C_i$ 中的所有状态互通，于是必有 $C = C_1$. 所以 (1) 成立.

由定理 16.15 和定理 16.11 我们可得 (2).

如果 $i \in C$，$i \to j$，由定理 16.9 我们有 $i \leftrightarrow j$，从而 $j \in C$. 于是 (3) 成立.

(4) 和 (5) 的证明：因为 C 是闭集，所以有

$$\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

由命题 16.12，如果 C 是零常返或非常返等价类，当 $n \to \infty$ 时，总有 $p_{ij}^{(n)} \to 0$. 如果 C 中只有有限个状态，在上式中令 $n \to \infty$，我们得 $0 = 1$. 这说明 C 不能是有限集合. □

于是我们知，当 C 中有正常返状态，则 C 中的所有状态都是正常返的，于是称 C 是**正常返等价类**；当 C 中有零常返状态，则 C 中的所有状态都是零常返的，于是称 C 是**零常返等价类**；当 C 中有非常返

状态，于是称 C 是**非常返等价类**；当 C 的某个状态有周期 d，则 C 中所有状态的周期都是 d，于是称 C 的周期是 d；当 C 中有一个遍历状态，C 中的状态都是遍历的，这时又称 C 是遍历等价类.

利用等价关系可以把马氏链得状态空间 I 分解成

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} +T,\ \text{这里}\ m \le \infty, \tag{17.1}$$

其中 C_j 是常返等价类，T 由全体非常返状态组成. 质点可以永远在 T 中运动，也可以从 T 转移到某个 C_j 中，然后永远在 C_j 中运动. 如果 T 是有限集合，质点一定会走出 T，进入某个闭集 C_j，然后永远在 C_j 中运动. 按照 (17.1) 的规律重新编排状态的顺序后可以将该马氏链的转移矩阵写成

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} & C_m & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_m & 0 \\ R_1 & R_2 & \cdots & R_{m-1} & R_m & Q_T \end{pmatrix} \end{array} = P. \tag{17.2}$$

由于常返等价类 C_k 是闭集，所以对应的 $P_k = (p_{ij})_{i,j\in C_k}$ 的每行之和是 1. 这就相当于 C_k 本身是一个不可约马氏链，质点从 C_j 中的状态出发或从 T 进入 C_j 后就永远在 C_j 中运动.

利用 $P^{(n)} = P^n$ 和矩阵乘法得到

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} & C_m & T \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} P_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_m^n & 0 \\ R_1^{(n)} & R_2^{(n)} & \cdots & R_{m-1}^{(n)} & R_m^{(n)} & Q_T^n \end{pmatrix} \end{array} = P^{(n)}. \tag{17.3}$$

由于马氏链 $\{X_n\}$ 可以有无穷个常返等价类，所以 (17.2) 和 (17.3) 中的 C_m，P_m，R_m 和 P_m^n，$R_m^{(n)}$ 可以同时改写为 "$\cdots$". P_m^n 的每行之和等于 1. 另外，用 $q_{ij}^{(n)}$ 表示 Q_T^n 的对应元素，于是由命题 16.12，我们还有

$$\lim_{n\to\infty} Q_T^n = (\lim_{n\to\infty} q_{ij}^{(n)})_{i,j\in T} = 0.$$

17.2 简单随机游动的常返性

例 17.3

简单随机游动中所有状态互通，$\{X_n\}$ 是一个不可约马氏链，I 是一个等价类. 要研究 I 是否为常返等价类，只要研究状态 i. 如果质点在第 $2n$ 步回到 i，则向左和向右各移动了 n 次. 设每次移动向右的概率为 p，由二项分布的性质我们可以得到

$$p_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^n = p^n q^n,\ p_{ii}^{(2n-1)} = 0.$$

当 $s = 4pq < 1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots\frac{2n-1}{2}s^n = (1-s)^{-1/2}.\ (\text{用 Taylor 级数展开})$$

由于 $4pq \le 1$，且 $4pq = 1$ 的充分必要条件是 $p = q$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ 的充分必要条件是 $p = q$. 于是 $p = q$ 时，直线上的简单对称随机游动是常返的. 当 $p \neq q$ 时，非对称的简单随机游动是非常返的. 用 $a_n \simeq b_n$ 表示 $a_n/b_n \to 1(n \to \infty)$. 利用斯特林公式

$$n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \tag{17.4}$$

可以进一步证明简单对称随机游动是零常返的. 实际上，由上式我们有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n)} = \lim_{n\to\infty} C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{2^2 n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n e^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0. \tag{17.5}$$

从定理 16.11 知道 i 是零常返的.

例 17.4

在两端是吸收壁的简单随机游动中，$\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 是一个等价类. 因为质点从 1 出发后不回到 1 的概率 $1 - f_{11}^* > P(X_1 = 0|X_0 = 1) = q > 0$，所以 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 是非常返等价类，$\{0\}$ 和 $\{n\}$ 是正常返等价类.

例 17.5

在两端是反射壁的简单随机游动中，$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ 是一个等价类. 由于 I 是闭集，且只有 $n+1$ 个状态. 所以 I 是正常返等价类.

例 17.6: 平面上的简单对称随机游动

设质点在平面的整数格点上做随机游动，每次以 $1/4$ 的概率向最邻近的 4 个状态转移. 将所有的格点编号后得到状态空间 I. 易见 I 的状态互通，因而是一个等价类. 质点从 i 出发后，只可能在 $2n$ 步上回到 i，这时质点向左、右各移动 k 步，向上、下各移动 $n-k$ 步. 用组合公式 $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$，利用斯特林公式 (17.4)，以及 (17.5) 我们有

$$p_{ii}^{(2n)} = \frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2}$$
$$= \frac{1}{4^{2n}}C_{2n}^n\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = (\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^n)^2$$
$$\simeq 1/(\pi n).$$

由于 $\sum_{n\ge1} n^{-1} = \infty$，所以平面上的简单对称随机游动也是常返的，再从 $p_{ii}^{(2n)} \to 0$ 知道，平面上的简单对称随机游动是零常返的.

例 17.7: 三维空间上的简单对称随机游动

设质点在三维直角坐标中的整数格点上做随机游动，每次以 1/6 的概率向最邻近的 6 个状态转移. 将所有的格点编号后得到状态空间 I. 易见 I 的状态互通，因而是一个等价类. 设 $K_n = \{j,k|j,k \geq 0, j+k \leq n\}$，则

$$p_{ii}^{(2n+1)} = 0,$$

$$p_{ii}^{(2n)} = \frac{1}{6^{(2n)}} \sum_{j,k \in K_n} \frac{(2n)!}{[j!k!(n-j-k)!]^2}.$$

可以验证 $k = j = [n/3]$，$n!/(j!k!(n-j-k)!)$ 达到最大值，再用斯特林公式得到

$$\frac{1}{3^n} \max_{j,k \in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = O(n^{-1}).$$

上式与三项公式

$$\sum_{j,k \in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = (1+1+1)^n = 3^n$$

结合，得到

$$p_{ii}^{(2n)} \leq \frac{1}{2^{2n}3^{2n}} C_{2n}^n \max_{j,k \in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} 3^n = O(n^{-3/2}).$$

由于 $\sum_{n\geq 1} n^{-3/2} < \infty$，所以三维空间中的简单对称随机游动是非常返的.

17.3 质点在常返等价类中的转移

当 C 是常返等价类时，我们知 C 是闭集. 质点从 C 中出发将永远在 C 中运动. 质点在 C 中的运动也是一个马氏链，仍然用 $\{X_n\}$ 表示.

例 17.8

考虑直线上的简单对称随机游动. 这时，状态空间 $I = \{j|j = 0, 1, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 中的所有状态互通，是一个常返等价类，有周期 $d = 2$. 用 G_1 表示所有的奇数，用 G_2 表示所有的偶数，则 $I = G_1 \cup G_2$. 质点从偶数状态出发，第 1 步进入 G_1，第 2 进入 G_2，第 3 步进入 $G_3 = G_1$，$\cdots$，第 $n = md - 1$ 步进入 $G_{md-1} = G_1$，第 $n = md$ 步进入 $G_{md} = G_2$，周而复始.

定理 17.9

设常返等价类 C 有周期 $d > 1$. 取定 C 中的状态 i. 对于 $j \in C$，

(1) 有唯一的 $r \in \{1, 2, \cdots, d\}$，使得只要 $p_{ij}^{(n)} > 0$，则有 $n = kd + r$；

(2) 对于 (1) 中的 r，存在 N_j 使得 $n > N_j$ 时，$p_{ij}^{(nd+r)} > 0$；

(3) $f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(nd+r)} = 1$.

证明. 因为 $j \leftrightarrow i$，所以有 k 使得 $p_{ji}^{(k)} > 0$.

(1) 如果 n, m 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{ij}^{(m)} > 0$，则有

$$p_{ii}^{(n+k)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0,$$

$$p_{ii}^{(m+k)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(k)} > 0.$$

由周期的定义我们知 $n+k, m+k$ 都是周期 d 的倍数，所以 $n-m=(n+k)-(m+k)$ 也是 d 的倍数. 这说明 n,m 被 d 除后有相同的余数，即存在唯一的 $r\in\{1,2,\cdots,d\}$，使得

$$n=k_1d+r,\ \ m=k_2d+r.$$

(2) 设 $p_{ij}^{(Nd+r)}>0$. 根据定理 16.15 (3)，存在 N_j 使得当 $m>N_j$ 时，$p_{jj}^{(md)}>0$. 当 $n>N+N_j$ 时有 $m=(n-N)>N_j$，于是有

$$p_{ij}^{(nd+r)}\geq p_{ij}^{(Nd+r)}p_jj^{(nd-Nd)}=p_{ij}^{(Nd+r)}p_{jj}^{(md)}>0.$$

(3) 由于 $f_{ij}^{(n)}$ 是质点从 i 出发在第 n 步首次到达 j 的概率，所以 $f_{ij}^{(n)}\leq p_{ij}^{(n)}$. 于是只要 n 使得 $f_{ij}^{(n)}>0$ 时，就有 $p_{ij}^{(n)}>0$，从而有 $n=kd+r$，再利用命题 16.18 (2) 我们知

$$f_{ij}^*=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(nd+r)}=1.$$ □

对于固定的 $i\in C$，定理 17.9 的 (1) 说明，质点从 i 出发后，只可能在 $t=kd+r$ 时转移到状态 j，r 是和 j 有关的正整数；性质 (2) 说明在时间充分长后，质点可以在任何时刻 $t=nd+r$ 到达 j. 现在定义

$$C_r=\{j|\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(nd+r)}>0\},\ r=1,2,\cdots,d$$

质点从 i 出发后，只能在时刻

$$r, d+r, 2d+r,\cdots$$

进入集合 G_r，于是得到 d 个互不相交的 $G_1, G_2,\cdots, G_d$. 质点在这些集合中的转移规律如下，质点从 i 出发后，第 1 步进入 G_1，第 2 步进入 G_2，$\cdots$，第 d 步进入 G_d. 第 $d+1$ 步进入 $G_{d+1}=G_1$，$\cdots$，依次循环.

命题 17.10

对于有周期 d 的正常返等价类 C 和 $i,j\in C$，有唯一的 $r(1\leq r\leq d)$，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}p_{ij}^{(nd+s)}=\frac{1}{d}p_{ij}^{(nd+r)}\to\frac{1}{\mu_j}.$$

证明. 根据定理 17.9 (1)，有唯一的 $r\in\{1,2,\cdots,d\}$ 使得只要 $p_{ij}^{(n)}>0$，则有 $n=kd+r$，所以

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}p_{ij}^{(nd+s)}=\frac{1}{d}p_{ij}^{(nd+r)}.$$

当 $f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(nd+r-k)}>0$ 时，有 $p_{ij}^{(k)}\geq f_{ij}^{(k)}>0$，于是有 $k=ld+r$. 于是

$$\begin{aligned}p_{ij}^{(nd+r)}&=\sum_{k=1}^{nd+r}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(nd+r-k)}\\&=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(ld+r)}p_{jj}^{(nd-ld)}\\&=\sum_{l=1}^{h}f_{ij}^{(ld+r)}p_{jj}^{(nd-ld)}+\sum_{l=h+1}^{n}f_{ij}^{(ld+r)}p_{jj}^{(nd-ld)}.\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$，用 $p_{jj}^{(nd-ld)} \to d/\mu_j$ 得到右边的第一项收敛到

$$\sum_{i=1}^{h} f_{ij}^{(ld+r)} \frac{d}{\mu_j},$$

第二项的极限不超过 $b_h \equiv \sum_{l=h+1}^{\infty} f_{ij}^{(ld+r)}$，即有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{\mu_j} \sum_{l=1}^{h} f_{ij}^{(ld+r)} + O(b_h).$$

令 $h \to \infty$，用 $\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(ld+r)} = 1$ 和 $b_h \to \infty$ 可得. □

命题 17.11

对于有周期 d 的正常返等价类 C 和 $i, j \in C$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_j}.$$

证明. 由前一命题我们有

$$a_l = \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{d} p_ij^{(ld+s)} \to \frac{1}{\mu_j}, \text{ 当 } l \to \infty \text{ 时}.$$

于是当 $m \to \infty$ 时，有

$$\frac{1}{md} \sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{d} \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{d} p_{ij}^{(ld+s)} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} a_l \to \frac{1}{\mu_j}.$$

对于任意自然数 n，存在 m 使得 $(m-1)d < n \le md$. 再由

$$\frac{1}{(m-1)d} \sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)} \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \le \frac{1}{(m-1)d} \sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)},$$

让 $n \to \infty$ 从而得证. □

第 18 讲　不变分布

设 P 是马氏链 $\{X_n\}$ 的转移概率矩阵，给定 X_0 的概率分布

$$\boldsymbol{\pi}^{(0)}=[\pi_1,\pi_2,\cdots].$$

我们知 X_n 的概率分布

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)}=[\pi_1^{(n)},\pi_2^{(n)},\cdots],$$

其中 $\pi_j^{(n)}=P(X_n=j)$，满足

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)}=\boldsymbol{\pi}^{(n-1)}P=\boldsymbol{\pi}^{(0)}P^n,\ n\geq 1.$$

命题 18.1

如果 $\boldsymbol{\pi}^{(1)}=\boldsymbol{\pi}^{(0)}$，则 $\boldsymbol{\pi}^{(n)}=\boldsymbol{\pi}^{(0)}$.

证明. 该式对 $n=1$ 已经成立. 设已知 $\boldsymbol{\pi}^{(n-1)}=\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ 成立, 则

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)}=\boldsymbol{\pi}^{(n-1)}P=\boldsymbol{\pi}^{(0)}P=\boldsymbol{\pi}^{(1)}=\boldsymbol{\pi}^{(0)}.$$ □

上面命题说明只要 $\boldsymbol{\pi}^{(1)}=\boldsymbol{\pi}^{(0)}$，则 X_n 和 X_0 同分布. 概率分布 $\boldsymbol{\pi}^{(1)}=\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ 等价于 $\boldsymbol{\pi}^{(0)}=\boldsymbol{\pi}^{(0)}P$. 也等价于

$$\sum_{j\in I}\pi_j=1,\ \pi_j=\sum_{k\in I}\pi_k p_{kj}\geq 0,\ j\in I. \tag{18.1}$$

定义 18.2

如果 $\boldsymbol{\pi}=[\pi_1,\pi_2,\cdots,\cdots]$ 满足 (18.1)，或等价地满足

$$\sum_{j\in I}\pi_j=1,\ \pi=\pi P, \tag{18.2}$$

则称 $\boldsymbol{\pi}$ 是马氏链 $\{X_n\}$ 或转移矩阵 P 的**不变分布**.

定理 18.3

设 C^+ 是马氏链 $\{X_n\}$ 的所有正常返状态，$i\in C^+$.

(1) 如果 C^+ 是遍历等价类，则

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=1/\mu_j,\ j\in I$$

是唯一不变分布.

(2) 如果 C^+ 是周期为 d 的等价类，则

$$\pi_j=\frac{1}{d}\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(nd)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{d}p_{ij}^{(nd+s)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)},\ j\in I$$

是唯一不变分布，且 $\pi_j=1/\mu_j$；

(3) $\{X_n\}$ 有唯一不变分布的充分必要条件是 C^+ 是等价类；

(4) $\{X_n\}$ 有不变分布的充分必要条件是 C^+ 非空；

(5) 状态有限的马氏链必有不变分布.

证明. 只对 C^+ 是有限集合的情形给出证明.

(1) 我们知

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & j \notin C^+, \\ 1/\mu, & j \in C^+. \end{cases}$$

因为质点从 i 出发不能走出 C^+，所以有

$$\sum_{j\in I} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j\in C^+} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

令 $n\to\infty$，得到 $\sum_{j\in I}\pi_j = \sum_{j\in C^+}\pi_j = 1$. 再利用 K-C 方程得到

$$\begin{aligned} \pi_j &= \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in C^+} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} \\ &= \sum_{k\in C^+} \pi_k p_{kj}, \end{aligned}$$

上述等式说明 $\{\pi_j\}$ 是不变分布.

(2) 当 $j \notin C^+$ 时，由命题 16.12 我们知道这 3 个极限都是 0. 当 $j \in C^+$ 时，由定理 16.15，命题 17.10 和命题 17.11 我们知这三个极限都是 $1/\mu_j$，于是

$$\pi_j = \begin{cases} 0, & j \notin C^+, \\ 1/\mu_j, & j \in C^+. \end{cases}$$

我们先验证 π_j 是不变分布. 注意 $i \in C^+$，我们有

$$\begin{aligned} \pi_j &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\sum_{s=1}^{d} p_{ij}^{(nd+s)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{d} \frac{1}{d} \sum_{k\in C^+} p_{ik}^{(nd+s-1)} p_{kj} \ (\text{用 } K-C \text{ 方程}) \\ &= \sum_{k\in C^+} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{d} p_{ik}^{(nd+s-1)} p_{kj} \\ &= \sum_{k\in C^+} \pi_k p_k j = \sum_{k\in I} \pi_k p_{kj}. \end{aligned}$$

又由 $\sum_{j\in C^+} p_{ij}^{(nd+s)} = 1$，我们有

$$\sum_{j\in I}\pi_j = \sum_{j\in C^+}\pi_j = \sum_{j\in C^+} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{d} p_{ij}^{(nd+s)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{d}\sum_{j\in C^+} p_{ij}^{(nd+s)} = 1.$$

由上我们知 $\{\pi_j\}$ 是不变分布.

下面证明唯一性. 如果 $\{\pi_k'\}$ 也是不变分布，则对于 $j \notin C^+$，由命题 16.12 我们有

$$\pi_j' = \sum_{k\in I} \pi_k' p_{kj}^{(nd+s)} \to 0, \ n\to\infty,$$

于是 $\pi'_j = \pi_j = 0$. 于是 $j \in C^+$，我们有

$$\pi'_j = \sum_{k\in I} \pi'_k p_{kj}^{(nd+s)} = \sum_{k\in C^+} \pi'_k p_{kj}^{(nd+s)},\ \ s = 1, 2, \cdots, d.$$

两边对 s 求平均后，令 $n \to \infty$ 我们有

$$\pi'_j == \sum_{k\in C^+} \pi'_k \frac{1}{d} \sum_{s=1}^{d} p_{kj}^{(nd+s)} \to \sum_{k\in C^+} \pi'_k \pi_j = \pi_j.$$

故 $\pi'_j = \pi_j$.

(3) 如果 C^+ 是一个正常返等价类，由 (1) 和 (2) 我们知不变分布存在且唯一. 如果 C^+ 至少有两个正常返等价类 C_1, C_2. 在马氏链的分解中 C_1, C_2 对应的矩阵分别是 P_1，P_2，则按照本定理的 (1) 和 (2)，有分布列 $\boldsymbol{\pi}_1$ 和 $\boldsymbol{\pi}_2$ 使得

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_1 P_1,\ \ \boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\pi}_2 P_2.$$

对于任意 $p = 1 - q \in [0, 1]$，定义

$$\boldsymbol{\pi} = [p\boldsymbol{\pi}_1, q\boldsymbol{p}_2, 0, \cdots, 0], \tag{18.3}$$

则对于 (17.2) 定义的 P，我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi} P &= [p\boldsymbol{\pi}_1, q\boldsymbol{p}_2, 0, \cdots, 0] \begin{pmatrix} C_1 & P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & P_m & 0 \\ T & R_1 & R_2 & \cdots & R_{m-1} & R_m & Q_T \end{pmatrix} \\
&= [p\boldsymbol{\pi}_1 P_1, q\boldsymbol{p}_2 P_2, 0, \cdots, 0] \\
&= [p\boldsymbol{\pi}_1, q\boldsymbol{p}_2, 0, \cdots, 0] \\
&= \boldsymbol{\pi}.
\end{aligned}$$

这说明任何组合 (18.3) 都是不变分布，即不变分布有无穷个.

(4) 当 C^+ 非空时，它就至少有一个正常返等价类，由 (3) 我们知不变分布存在. 如果 C^+ 是空集，那么我们知对任意 $i.j \in I$，有 $p_{kj}^{(n)} \to 0$. 设 $\boldsymbol{\pi}$ 是不变分布，则由 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$ 得到 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P^{(n)}$，从而得到

$$\pi_j = \sum_{k\in I} \pi_k p_{kj}^{(n)} \to 0,\ \ n \to \infty.$$

这与 $\sum_{j\in I} \pi_j = 1$ 矛盾.

(5) 有限状态马氏链至少有一个正常返状态，由 (4) 我们知不变分布必然存在. □

命题 18.4

设 $P = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$ 是马氏链的一步转移概率矩阵，P_j 是 P 的第 j 列，则方程组

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P,\ \ \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1 \tag{18.4}$$

和

$$[\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{m-1}] = \boldsymbol{\pi}(P_1, P_2, \cdots, P_{m-1}), \ \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1 \tag{18.5}$$

有相同的解.

证明. (18.4) 的方程数比 (18.5) 多一个，所以 (18.4) 的解也是 (18.5) 的解. 如果 $\boldsymbol{\pi}$ 满足 (18.5)，对 $j = 1, 2, \cdots, m-1$ 有 $\pi_j = \boldsymbol{\pi} P_j$，于是由

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1, \ \sum_{j=1}^{m} P_j = \mathbf{1}, \ \pi\mathbf{1} = 1,$$

其中 $\mathbf{1}$ 表示元素都是 1 的向量，我们得到

$$\boldsymbol{\pi} P_m = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{1} - \sum_{j=1}^{m-1} P_j) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \boldsymbol{\pi} P_j = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \pi_j = \pi_m,$$

从而得证. □

例 18.5

设马氏链的状态空间是 $I = \{1, 2\}$，转移矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

(1) 计算不变分布 $\boldsymbol{\pi}$ 和极限 $\lim_{n\to\infty} P^n$；

(2) 计算状态 $1, 2$ 的期望返回时间 μ_1, μ_2.

解. (1) 马氏链互通，是一个遍历等价类. 解方程

$$\begin{cases} p_1 = \frac{3}{4}p_1 + \frac{5}{8}p_2, \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

得到不变分布 $\boldsymbol{\pi} = (5/7, 2/7)$. 由于马氏链是遍历的，由定理 18.3 (1) 我们有

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} P_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

(2) 根据公式 $\pi_j = 1/\mu_j$ 我们有 $\mu_1 = 7/5$，$\mu_2 = 7/2$. □

例 18.6: Ehrenfest 模型

容器内有 $2a$ 个粒子，一张薄膜将该容器分成对称的 A，B 两部分. 将粒子穿过薄膜时占用的时间忽略不计. 用 X_0 表示初始时 A 中的粒子数，X_n 表示有 n 个粒子穿过薄膜后 A 中的粒子数，X_n 表示有 n 个粒子穿过薄膜后 A 中的粒子数. 当所有粒子以相同的规律独立行动时，$\{X_n\}$ 是马氏

链，有状态空间 $I=\{0,1,2,\cdots,2a\}$. 设马氏链 $\{X_n\}$ 有转移概率

$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{2a-i}{2a}, & 0\le i\le 2a-1,\ j=i+1,\\ \dfrac{i}{2a}, & 1\le i\le 2a,\ j=i-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

计算该马氏链的不变分布.

解. 从问题的背景知道这是一个正常返马氏链，周期等于 2，不变分布唯一存在. 补充定义 $\pi_{-1}=\pi_{2a+1}=0$，可将方程组 $\pi=\pi P$ 写成

$$\pi_i=\pi_{i-1}p_{i-1,i}+\pi_{i+1}p_{i+1,i},\ 0\le i\le 2a.$$

于是有

$$\pi_{i+1}=\frac{\pi_i-\pi_{i-1}p_{i-1,i}}{p_{i+1,i}}.$$

经过计算依次得到

$$\begin{aligned}\pi_1&=\frac{\pi_0}{p_{10}}=2a\pi_0=C_{2a}^1\pi_0,\\ \pi_2&=\frac{\pi_1-\pi_0p_{01}}{p_{21}}=(\pi_1-\pi_0)2a/2=(2a-1)a\pi_0=C_{2a}^2\pi_0,\\ \pi_3&=\frac{\pi_2-\pi_1p_{12}}{p_{32}}=(\pi_2-\pi_1p_{12})2a/3=C_{2a}^3\pi_0,\\ &\cdots\cdots\\ \pi_a&=C_{2a}^{2a}\pi_0.\end{aligned}$$

利用 $\pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_{2a}=2^{2a}\pi_0=1$ 得到 $\pi_0=2^{-2a}$. 最后得到不变分布

$$\pi_i=C_{2a}^i\Big(\frac{1}{2}\Big)^i\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2a-i},\ 0\le i\le 2a.$$

这是二项分布 $\mathcal{B}(2a,1/2)$，表明在不变分布下或时间充分长之后，个粒子的位置是相互独立的，每个粒子位于 A 中的概率是 1/2. □

第 19 讲 平稳性和平稳可逆性

19.1 平稳性

设 $\{X_n\}$ 有不变分布 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \cdots]$. 当不变分布 $\boldsymbol{\pi}$ 是 X_0 的初始分布时，对 $n = 1, 2, \cdots$ 有

$$P(X_n = j) = \pi_j^{(n)} = \pi_j = P(X_0 = j).$$

这时 X_n 的概率分布不随 n 变化.

命题 19.1

对于任意 $m, n \geq 1$，随机向量

$$\boldsymbol{\xi}_n = (X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+m}) \text{ 和 } \boldsymbol{\xi}_0 = (X_0, X_1, \cdots, X_m)$$

有相同的联合分布.

证明. 对于事件

$$A_k = \{X_{n+k} = i_k\},\ B_k = \{X_k = i_k\},\ k = 0, 1, \cdots, m,$$

有 $P(A_0) = P(X_n = i_0) = P(X_0 = i_0) = P(B_0)$. 对于 $k = 1, 2, \cdots, m$，由时齐性我们有

$$P(A_k|A_0A_1\cdots A_{k-1}) = P(X_k = i_k|X_{k-1} = i_{k-1}) = P(B_k|B_0B_1\cdots B_{k-1}).$$

再利用乘法公式我们有

$$\begin{aligned}
P(X_n = i_0, X_{n+1} = i_1, \cdots, X_{n+m} = i_m) &= P(A_0A_1\cdots A_m) \\
&= P(A_0)P(A_1|A_0)\cdots P(A_m|A_0A_1\cdots A_{m-1}) \\
&= P(B_0)P(B_1|B_0)\cdots P(B_m|B_0B_1\cdots B_{m-1}) \\
&= P(B_0B_1\cdots B_m) \\
&= P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_m = i_m).
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\xi}_n$ 和 $\boldsymbol{\xi}_0$ 同分布. □

命题 19.2

设遍历马氏链 $\{X_n\}$ 的初始分布是平稳不变分布 $\boldsymbol{\pi}$，马氏链 $\{Y_n\}$ 的转移概率和 $\{X_n\}$ 的转移概率相同，则对任意 $m \geq 1$，

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = i_0, Y_{n+1} = i_1, \cdots, Y_{m+n} = i_m) = P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_m = i_m).$$

证明. 用 p_{ij} 表示转移概率. 对任意 j 利用 $\sum_{i\in I} P(Y_0 = i) = 1$ 以及 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ 得到

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} P(Y_0 = i)p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in I} P(Y_0 = i)\pi_j = \pi_j.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(Y_n = i_0, Y_{n+1} = i_1, \cdots, Y_{n+m} = i_m) \\
=&\lim_{n\to\infty} P(Y_n = i_0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m} \\
=&\pi_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{m-1} i_m} \\
=&P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_m = i_m).
\end{aligned}$$

□

当马氏链是平稳序列时，称马氏链处于**平稳状态**. 上面命题结论说明，对于遍历马氏链，随着时间的推移马氏链 $\{Y_n\}$ 趋于稳定状态.

19.2 平稳可逆性

如果 $\{X_n\}$ 是以 $\{\pi_i\}$ 为不变分布的马氏链，有转移概率矩阵 $P = (p_{ij})$，对于 $n > m \geq 0$，因为已知现在 $B = \{X_m = i\}$ 时，过去 $A = \{X_{m-1} = j\}$ 与将来 $C = \{x_{m+1} = i_{m+1}, X_{m+2} = i_{m+2}, \cdots, X_n = i_n\}$ 独立，所以有

$$P(A|BC) = P(A|B).$$

利用 X_n 和 X_0 同分布得到

$$\begin{aligned}
&P(X_{m-1} = j | X_m = i, X_{m+1} = i_{m+1}, \cdots, X_n = i_n) \\
=&P(X_{m-1} = j | X_m = i) = \frac{P(X_{m-1} = j, X_m = i)}{P(X_m = i)} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}.
\end{aligned}$$

上式只与 i, j 有关，与 m 无关. 这说明把时间倒过来看，$\{X_n\}$ 也具有马氏性，一步转移概率是

$$p^*_{ij} = P(X_0 = j | X_i = i) = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i},\ m \geq 0.$$

如果这个转移概率也等于 p_{ij}，则由 $p^*_{ij} = p_{ij}$ 我们可以得到

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji},\ i, j \in I. \tag{19.1}$$

定义 19.3

设马氏链 $\{X_n\}$ 有一步转移概率矩阵 $P = (p_{ij})$.

(1) 如果有不全为零的非负数列 $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_i\}$，使得

$$\eta_i p_{ij} = \eta_j p_{ji},\ i, j \in I$$

成立，则称 $\{X_n\}$ 是**对称马氏链**，称 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\{X_n\}$ 或 P 的**对称化序列**. 特别当概率分布 $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i\}$ 使得

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji},\ i, j \in I,$$

称 $\boldsymbol{\pi}$ 为 $\{X_n\}$ 或 P 的**可逆分布或平稳可逆分布**.

(2) 若 $\{Y_n\}$ 是平稳序列，且对于任何 $n > m \geq 0$，随机向量

$$(Y_m, Y_{m+1}, \cdots, Y_{n-1}, Y_n) \text{ 和 } (Y_n, Y_{n-1}, \cdots, Y_{m+1}, Y_m)$$

同分布，则称 $\{Y_n\}$ 是时间可逆的平稳序列或**平均可逆序列**;

(3) 若马氏链 $\{X_n\}$ 是平稳可逆序列，则称 $\{X_n\}$ 为**可逆马氏链**.

显然，当 $\{X_n\}$ 有对称化序列 $\boldsymbol{\eta}$ 时，只要 $\sum_{j\in I}\eta_j<\infty$，则可以得到 $\{X_n\}$ 的平稳可逆分布

$$\pi_i=\frac{\eta_i}{\sum_{j\in I}\eta_j},\ i\in I.$$

如果 $\{X_n\}$ 是可逆马氏链，则将时间的方向倒过来看，质点的运动规则不发生变化，有相同的转移概率且任何 X_n 和 X_0 同分布.

下面的命题说明平稳可逆分布使得马氏链成为平稳可逆序列.

命题 19.4

设马氏链 $\{x_n\}$ 有转移概率 $\{p_{ij}\}$ 和平稳可逆分布 $\boldsymbol{\pi}$，则

(1) $\boldsymbol{\pi}$ 是 $\{X_n\}$ 的平稳不变分布；

(2) 当 $\{X_n\}$ 的初始分布为 $\boldsymbol{\pi}$ 时，$\{X_n\}$ 是可逆马氏链.

证明. (1) 在 (19.1) 的两边对于 j 求和，就得到

$$\pi_i=\pi_i\sum_{j\in I}p_{ij}=\sum_{j\in I}\pi_jp_{ji},\ i\in I.$$

这说明平稳可逆分布 $\boldsymbol{\pi}$ 是平稳不变分布.

(2) 当 $P(X_0=i)=\pi_i$ 时，对于任何 $n=m+1$，有

$$\begin{aligned}&P(X_{m+1}=i,X_m=j)\\=\ &\pi_jp_{ji}\\=\ &\pi_ip_{ij}\\=\ &P(X_m=i,X_{m+1}=j).\end{aligned}$$

这说明定义 19.3 (2) 中条件对 $n=m+1$ 成立. 对于 $n=m+2$，我们有

$$\begin{aligned}&P(X_{m+2}=i,X_{m+1}=j,X_m=k)\\=\ &P(X_m=k)P(X_{m+1}=j|X_m=k)P(X_{m+2}=i|X_{m+1}=j)\\=\ &(\pi_kp_{kj})p_{ji}=(p_{jk}\pi_j)p_{ji}=p_{jk}(\pi_jp_{ji})=p_{jk}(\pi_ip_{ij})\\=\ &P(x_m=i,X_{m+1}=j,X_{m+2}=k).\end{aligned}$$

这说明定义 19.3 (2) 中条件对 $n=m+2$ 成立. 用完全同样的方法可以证明定义 19.3 (2) 中条件对一般的 n 成立. □

命题 19.5

如果 $\{\eta_j\}$ 是互通马氏链的对称化序列，则所有的 $\eta_j>0$.

证明. 设 $\eta_i>0$. 对于任何 j，如果 $p_{ij}>0$，则从 $\eta_jp_{ji}=\eta_ip_{ij}>0$ 得到 $\eta_j>0$；如果 $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_kj}>0$，则依次得到

$$\begin{aligned}\eta_{i_1}p_{i_1i}&=\eta_ip_{ii_1}>0,\ \eta_{i_1}>0,\\\eta_{i_2}p_{i_2i_1}&=\eta_{i_1}p_{i_1i_2}>0,\ \eta_{i_2}>0,\\&\cdots\cdots\ \cdots\cdots\\\eta_jp_{ji_k}&=\eta_{i_k}p_{i_kj}>0,\ \eta_j>0.\end{aligned}$$

□

19.3 平稳可逆分布的计算

定理 19.6

设互通马氏链 $\{X_n\}$ 以平稳不变分布 $\boldsymbol{\pi}$ 为初始分布.

(1) $\{X_n\}$ 是可逆马氏链的充分必要条件是对于任何 $i, i_1, i_2, \cdots, i_k \in I$，有

$$p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_ki} = p_{ii_k}p_{i_ki_{k-1}}\cdots p_{i_1i}; \tag{19.2}$$

(2) 当 $\{X_n\}$ 是平稳可逆序列，对于取定的 i 以及从 i 到 j 的**通路** $i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to j$ (意指 $p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_kj} > 0$). 定义

$$\eta_i = 1,\ \eta_j = \frac{p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_kj}}{p_{ji_k}p_{i_ki_{k-1}}\cdots p_{i_1i}},\ j \neq i, \tag{19.3}$$

则 $\{\eta_j\}$ 是 $\{X_n\}$ 的对称化序列.

条件 (19.2) 称为 **柯尔莫哥洛夫条件**.

证明. (1) 由乘法公式，我们有

$$\begin{aligned}&P(X_0 = i, X_1 = i_1, X_2 = i_2, \cdots, X_k = i_k, X_{k=1} = i)\\ =&p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{k-1}i_k}p_{i_ki},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(X_{k+1} = i, X_k = i_1, \cdots, X_1 = i_k, X_0 = i)\\ =&P(X_0 = i, X_1 = i_k, X_2 = i_k - 1, \cdots\ X_k = i_1, X_{k+1} = i)\\ =&\pi_i p_{ii_k}p_{i_ki_{k-1}}\cdots p_{i_2i_1}p_{i_1i}.\end{aligned}$$

如果 $\{X_n\}$ 是可逆马氏链，则平稳可逆序列，上面两式的左边相等，于是右边也相等，这就得到了 (19.2).

反过来，如果 (19.2) 成立，上面两式右边相等，从而左边也相等. 在上述两式的两边对 $i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}$ 求和，得到

$$P(X_0 = i, X_k = i_k, X_{k=1} = i) = P(X_{k+1} = i, X_1 = i_k, X_0 = i).$$

把 i_k 改成 j，得到

$$p_{ij}^{(k)}p_{ji} = p_{ij}p_{ji}^{(k)}.$$

两边对于 k 求平均得到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}p_{ji} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ji}^{(k)}p_{ij}.$$

因为马氏链互通且具有平稳分布，所以是正常返的. 令 $n \to \infty$. 我们有 $\pi_j p_{ji} = \pi_i p_{ij}$，这说明 $\{pi_i\}$ 是平稳可逆分布.

(2) 这时 (19.2) 成立，先说明 (19.3) 中的 η_j 和通路的选择无关，实际上对于 i 到 j 的另外一条通路 $i \to J_1 \to j_2 \to \cdots \to j_s \to j$，从 (19.2) 我们知道下式左边的分子成衣右边的分母等于右边的分子乘以左边的分母，即有

$$\frac{p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{k-1}i_k}p_{i_kj}}{p_{ji_k}p_{i_ki_{k-1}}\cdots p_{i_2i_1}p_{i_1i}} = \frac{p_{ij_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_sj}}{p_{jj_s}p_{j_sj_{s-1}}\cdots p_{j_1i}},$$

这就证明了 η_j 和通路的选取无关.

对于 i 到 j 的通路 $i\to i_1\to i_2\to\cdots i_k\to j$ 和 i 到 j 的道路 $i\to j_1\to j_2\to\cdots\to j_s\to i$，还用上面交叉相乘的方法得到

$$\begin{aligned}\eta_j p_{jl}&=\frac{p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{k-1}i_k}p_{i_kj}p_{jl}}{p_{ji_k}p_{i_ki_{k-1}}\cdots p_{i_2i_1}p_{i_1i}}\\&=\frac{p_{ij_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_sl}p_{lj}}{p_{jj_s}p_{j_sj_{s-1}}\cdots p_{j_1i}}=\eta-lp_{lj}.\end{aligned}$$

这说明 $\{\eta_j\}$ 是对称化序列. □

定理 19.7

互通马氏链 $\{X_n\}$ 存在对称化序列的充分必要条件是对于任何 $i,i_1,i_2,\cdots,i_k\in I$，有 (19.2) 成立. 当 $\{X_n\}$ 存在对称化序列时，对于任意取定的 i，定义 $\eta_i=1$ 时，由 (19.3) 定义的 $\{\eta_j\}$ 是 $\{X_n\}$ 的对称化序列.

对于互通的马氏链，下面是计算可逆分布的步骤：

(1) 验证条件 (19.2) 成立后，用 (19.3) 计算对称化序列 $\{\eta_j\}$；或者先按 (19.3) 计算计算 $\{\eta_j\}$，再验证 $\{\eta_j\}$ 满足 $\eta_j p_{jk}=\eta_k p_{kj}$，$j,k\in I$. 如满足，则 $\{\eta_j\}$ 是对称化序列；否则没有对称化序列，也就没有可逆分布.

(2) $\{\eta_j\}$ 是对称化序列时，如果 $c=\sum_{j\in I}\eta_j<\infty$，则 $\pi_j=\eta_j/c(j\in I)$ 是平稳可你分布，马氏链是正常返的；否则马氏链不是正常返的，平稳可逆分布不存在.

例 19.8

证明两端为反射壁的简单随机游动是可逆马氏链，并计算对称化序列和平稳可逆分布.

证明. 由于质点每次只能向左或向右走一步，引入

$$\begin{aligned}\eta_0&=1,\\\eta_i&=\frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{i-1,i}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{i,i-1}}=\frac{p^{i-1}}{q^i},\ 1\le i\le n-1,\\\eta_n&=\frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{n-1,n}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{n,n-1}}=\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}.\end{aligned}$$

可以如下验证 $\{\eta_i\}$ 是对称化序列，

$$\begin{aligned}\eta_0p_{01}&=1=\frac{p^0}{q^1}q=\eta_1p_{10},\\\eta_ip_{i,i+1}&=\frac{p^{i-1}}{q^i}p=\frac{p^i}{q^{i+1}}q=\eta_{i+1}p_{i+1,i},\ 1\le i\le n-2,\\\eta_{n-1}p_{n-1,n}&=\frac{p^{n-2}}{q^{n-1}}p=\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\times1=\eta_np_{n,n-1}.\end{aligned}$$

再从右向左看就知道已有 $\eta_ip_{i,i-1}=\eta_{i-1}p_{i-1,i}$，说明 $\{\eta_i\}$ 是对称化序列，并且

$$\pi_i=\eta_j/\sum_{j=0}^n\eta_j,\ i=0,1,\cdots,n$$

是平稳可逆分布. □

例 19.9

质点在 $I=\{0,1,\cdots\}$ 中作随机游动，有转移概率

$$p_{ij}=\begin{cases} p_i, & 当 j=i+1,\ i\geq 0, \\ 1-p_i, & 当 j=i-1,\ i\geq 1, \end{cases}$$

其中 $p_{01}=p_0=1$，当 $i>1$ 时，$p_i\in(0,1)$.

(1) 证明转移概率 $\{p_{ij}\}$ 存在对称化序列 η；

(2) 求转移概率 $\{p_{ij}\}$ 有平稳可逆分布的充分必要条件；

(3) 给出 $\{p_{ij}\}$ 有平稳不变分布的充分必要条件.

证明. (1) 质点每次只能向左或向右走一步. 设 $q_i=1-p_i$，引入

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1, \\ \eta_i &= \frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{i-1,i}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{i,i-1}}=\frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i},\ i\geq 1. \end{aligned}$$

可以如下验证 $\{\eta_i\}$ 是对称化序列：

$$\begin{aligned} \eta_0p_{01}=1=\frac{p_0}{q_1}q_1=\eta_1p_{10}, \\ \eta_ip_{i,i+1}=\frac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i}p_i=\frac{p_0p_1\cdots p_i}{q_1q_2\cdots q_{i+1}}q_{i+1} \\ =\eta_{i+1}p_{i+1,i},\ i\geq 1. \end{aligned}$$

(2) 如果 $c\equiv\eta_0+\eta_1+\cdots<\infty$，则 $\pi_i=\eta_i/c$ 是平稳可逆分布；否则马氏链不是正常返的，平稳可逆分布不存在，所以 $\{p_{ij}\}$ 由平稳可逆分布的充分必要条件是 $c<\infty$.

(3) 由 (2) 知道马氏链正常返的充分必要条件是 $c<\infty$，所以存在平稳不变分布的充分必要条件也是 $c<\infty$. □

例 19.10

直线，平面和空间中的简单对称随机游动有对称化序列 $\eta_j=1$，$j\in I$，但是没有平稳可逆分布.

证明. 从 $p_{ij}=p_{ji}$ 和 $\sum_{j\in I}\eta_j=\infty$ 得到结论. □

第 20 讲 离散时间分支过程

20.1 离散时间分支过程

考虑由同类生物 (或粒子) 构成的群体，其中的每个生物在寿终时以概率 $P(\xi = j) = p_j$ 分裂成 j 个后代，且与其他生物的分裂情况独立. 其后代也按照相同的方式各自独立分裂自己的后代. 用 X_n 表示第 n 代生物的总数，称随机序列 $\{X_n\}$ 为 **离散时间分支过程**，也称为 Galton-Watson 分支过程.

现在用 ξ_{nk} 表示第 n 代的第 k 个个体寿终时分裂成的后代数，则 $\{\xi_{nk}\}$ 是来自总体 ξ 的随机变量. 对 $m = 1, 2, \cdots$，用 $X_0 = m$ 表示第 0 代有 m 个个体. 在条件 $X_0 = 1$ 下，有

$$\begin{aligned}
&X_1 = \xi_{01},\\
&X_2 = \sum_{k=1}^{X_1} \xi_{1k},\\
&\cdots\cdots\\
&X_n = \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \xi_{n-1,k}.
\end{aligned}$$

当 $X_0 = 1$ 时，还可以计算出

$$\mathrm{Var}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}, & \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \mu = 1. \end{cases}$$

因为已知 $X_{n-1} = i$ 后，X_n 和 $(X_0, X_1, \cdots, X_{n-2})$ 独立，并且

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(X_1 = j | X_0 = i),\ i, j \geq 0,$$

所以离散时间分支过程是马氏链.

20.2 灭绝概率

对于分支过程我们关心的是当 $X_0 = 1$ 时群体灭绝的概率 ρ_0. 由于群体灭绝当且第一代每个个体的后代灭绝，所以有

$$P(\text{群体灭绝} | X_1 = j) = \rho_0^j,\ j = 0, 1, \cdots .$$

于是在条件 $X_0 = 1$ 下，容易计算

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= P(\text{群体灭绝})\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P(\text{群体灭绝} | X_1 = j) p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_0^j p_j.
\end{aligned} \tag{20.1}$$

定义

$$g(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j - s,$$

(20.1) 说明灭绝概率 ρ_0 是 $g(s) = 0$ 的解.

定理 20.1

设 $p_0>0$，$p_0+p_1<1$. 若 $X_0=1$，则

(1) ρ_0 是 $g(s)=0$ $(s\in[0,1])$ 的最小解;

(2) $\rho_0=1$ 的充分必要条件是 $\mu=E\xi\le 1$.

证明. (1) 我们只需证明如果 $\rho>0$ 使得 $g(\rho)=0$，则 $\rho\ge\rho_0$.

我们首先由归纳法证明对于 $n\ge1$，$\rho\ge P(X_n=0)$. 首先我们有

$$\rho=\sum_{j=0}^{\infty}p_j\rho^j=p_0\rho^0=P(X_1=0).$$

于是结论对 $n=1$ 成立. 设 $\rho\ge P(X_{n-1}=0)$，注意到 $X_0=1$，利用 $P(X_n=0|X_1=j)=[P(X_{n-1}=0)]^j$，我们有

$$\rho=\sum_{j=0}^{\infty}p_j\rho^j\ge\sum_{j=0}^{\infty}p_j[P(X_{n-1}=0)]^j=\sum_{j=0}^{\infty}P(X_1=j)P(X_n=0|X_1=j)=P(X_n=0).$$

这就得到 $\rho\ge P(X_n=0)$. 对于 $n\ge1$，$A_n=\{X_n=0\}$ 是单调增加的，所以有

$$\rho_0=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)\le\rho.$$

这说明 ρ_0 是最小解. 因为 $g(0)=p_0>0$，所以 $\rho_0\in(0,1]$.

(2) 函数 $g(s)$ 在 $(0,1]$ 中连续，且

$$g'(s)=\sum_{j=0}^{\infty}js^{j-1}p_j-1,\ g'(1)=\mu-1.$$

如果 $\mu\le1$，对于 $s\in[0,1)$，我们有

$$g'(s)<g'(1)=\mu-1\le0,$$

所以 $g(s)$ 是 $[0,1)$ 中的严格单调减函数. 由 $g(1)=0$ 知道 $\rho_0=1$ 是 $g(s)$ 在 $(0,1]$ 中的唯一零点，所以 $\rho_0=1$.

当 $\mu>1$ 时，我们证明 $\rho_0<1$. $g'(1)=\mu-1>0$ 说明 $g(s)$ 在 1 附近严格单调升. 又从

$$g''(s)=\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)s^{j-2}p_j>0$$

知道 $g(s)$ 是严格的凸函数，于是再从 $g(0)=p_0>0$，$g(1)=0$ 知道 $g(s)=0$ 在开区间 $(0,1)$ 中有唯一解 p_0. □

命题 20.2

设 ρ_0 是 $X_0=1$ 时分支过程 $\{X_n\}$ 的灭绝概率. 当 $p_0>0$，$p_0+p_1<1$ 时，有

$$P(\lim_{n\to\infty}X_n=0)=\rho_0,\ P(\lim_{n\to\infty}X_n=\infty)=1-\rho_0.$$

证明. 第一个等式就是灭绝概率的定义，自然成立. 0 是吸引状态. 对于 $i \geq 1$，由

$$p_{i0} = (P(\xi = 0))^i = p_0^i > 0,$$

我们知质点从 i 出发以正概率不回到 i，说明 i 不是常返的. 于是 $C = \{1, 2, \cdots, m\}$ 中的状态都是非常返的. 这说明马氏链最多访问 C_m 有限次，最终离开 C_m. 定义 $W = \liminf_{n\to\infty} X_n$, 就有

$$P(W = 0) = \rho_0,$$

$$P(W \in C_m) = 0,$$

$$P(W \geq m) = 0,$$

$$P(W \geq m) = 1 - P(W \in C_m) - P(W = 0) = 1 - \rho_0.$$

事件列 $B_m = \{W \geq m\}$ 单调减，用概率的连续性得到

$$P(W = \infty) = P(\bigcap_{m=1}^{\infty} \{W \geq m\}) = \lim_{m\to\infty} P(W \geq m) = 1 - \rho_0. \qquad \square$$

当生物的最初群体数 $X_0 = m$ 时，由于个体独立地分裂自己的后代，所以群体的平均增长速度为 $E[X_n|X_0 = m] = m\mu^n$，方差为

$$\mathrm{Var}(X_n|X_0 = m) = \begin{cases} m\sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}, & \mu \neq 1, \\ mn\sigma^2, & \mu = 1. \end{cases}$$

群体最终灭绝的概率为 ρ_0^m，群体数走向无穷的概率为 $1 - \rho_0^m$. 群体的初始数 m 越大，最终灭绝的概率越小. 当 $\mu > 1$，方差 $\mathrm{Var}(X_n)$ 的指数增加说明每个个体的后代数发展得很快.

例 20.3

若 $p_0 = 1/2$, $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/4$, 确定 ρ_0.

证明. 因为 $\mu = E\xi \leq 1$, 所以 $\rho_0 = 1$. $\square$

例 20.4

若 $p_0 = 1/4$, $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/2$, 确定 ρ_0.

证明. 我们知, ρ_0 满足

$$\rho_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\rho_0 + \frac{1}{2}\rho_0^2,$$

从而

$$2\rho_0^2 - 3\rho_0 + 1 = 0.$$

这个二次方程的最小正解为 $\pi_0 = 1/2$. $\square$

第 21 讲　连续时间马氏链

21.1　连续时间马氏链的定义

设 I 是状态空间，$\{X(t)\} = \{X(t)|t \geq 0\}$ 是以 I 为状态空间的连续时间随机过程.

定义 21.1

如果对任何正整数 n，$t_0 < t_1 < \cdots < \cdots < t_{n+1}$ 和 $i, j, i_0, i_1, \cdots, i_{n-1} \in I$，有

$$P(X(t_{n+1}) = j|X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \cdots, X(t_0) = i_0) = P(X(t_{n+1}) = j|X(t_n) = i),$$

则称 $\{X(t)\}$ 是连续时间离散状态的马氏链，简称为**连续时间马氏链**.

上面定义中的“链”表明状态空间 I 是离散的. 和离散时间马氏链的情况相同，我们称具有性质

$$P(X(t+s) = j|X(s) = i) = P(X(t) = j|X(0) = i),\ \ s, t \geq 0$$

的马氏链为**时齐马氏链**. 时齐性表明**转移概率**

$$p_{ij}(t) = P(X(t+s) = j|X(s) = i) \tag{21.1}$$

与起始时间 s 无关.

无特别说明时。以后的马氏链都是时齐马氏链，并且简称为马氏链.

连续时间马氏链和离散时间马氏链的定义形式上非常相似，因此连续时间马氏链也会具有很多与离散时间马氏链类似的性质，我们列举如下：

(1) $p_{ij}(0)$ 是 δ 函数：

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \in I, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(2) 对于 $t > 0$，已知 $X(t) = i$ 的条件下，将来 $\{X(u)|u > t\}$ 与过去 $\{X(v)|0 \leq v < t\}$ 独立.

(3) K-C **方程**：对任意 $t, s \geq 0$，有

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s)\ \text{或} P(t+s) = P(t)P(s),$$

其中

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in I}$$

称为马氏链 $\{X(t)\}$ 的**转移概率矩阵**.

推论 21.2

对于转移概率矩阵 $P(t)$ 和 $\epsilon > 0$，我们有 $\{P(t) : t \in (0, \epsilon]\}$ 可以决定所有的 $P(t)$.

证明. 对任意 $t > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $t/n \in (0, \epsilon]$，而 $P(t) = P(t/n)^n$. □

(4) 马氏链的有限维分布由转移概率 (21.1) 和初始分布

$$p_i = P(X(0) = i),\ \ i \in I$$

唯一决定，且对 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，有

$$\begin{aligned}&P(X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \cdots, X(t_n)=i_n|X(0)=i)\\=&p_{ii_1}(t_1)p_{i_1i_2}(t_2-t_1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1}).\end{aligned}$$

特别当 $t_{j+1}-t_j=a$ 时，有

$$P(X(a)=i, X(2a)=i, \cdots, X(na)=i|X(0)=i)=[p_{ii}(a)]^n.$$

(5) $X(t)$ 的概率分布由转移概率矩阵和 $X(0)$ 的概率分布

$$\boldsymbol{p}(0)=[p_1(0), p_2(0), \cdots]$$

唯一决定，

$$\boldsymbol{p}(t)=\boldsymbol{p}(0)P(t),$$

其中 $\boldsymbol{p}(t)=[p_1(t), p_2(t), \cdots]$, $t\ge 0$, $p_i(t)=P(X(t)=i)$, $i\in I$.

(6) 对于 $s, t\ge 0$，有

$$p_{jj}(s+t)\ge p_{jj}(s)p_{jj}(t),\ p_{jj}(t)\ge [p_{jj}(\frac{t}{n})]^n.$$

21.2 泊松过程是马氏链

泊松过程具有独立增量性和平稳增量性，状态空间 $I=\{0,1,\cdots\}$. 设 λ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的强度，$t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$，利用独立增量性和平稳增量性得到

$$\begin{aligned}&P(N(t_{n+1})=j|N(t_n)=i, N(t_{n-1})=i_{n-1}, \cdots, N(t_0)=i_0)\\=&P(N(t_{n+1})-N(t_n)=j-i|N(t_n)=i, \cdots, N(t_0)=i_0)\\=&P(N(t_{n+1})-N(t_n)=j-i)=P(N(t_{n+1}-t_n)=j-i).\end{aligned}$$

上式只与 $i, j, t_{n+1}-t_n$ 有关，于是知道 $\{N(t)\}$ 是马氏链，有初始分布 $P(N(0)=0)=1$ 和转移概率

$$p_{ij}(t)=P(N(t)=j-i)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t} & \text{当 } j\ge i,\\ 0, & \text{当 } j<i,\end{cases}$$

其中

$$p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\ne j.\end{cases}$$

从上面的推到可以看出，取整数值的有独立增量性的平稳增量过程是马氏链.

容易看出 $p_{ij}(t)$ 是连续函数，在 $t=0$ 处有右导数

$$q_{ij}\equiv p'_{ij}(0)=\begin{cases}-\lambda, & j=i,\\ \lambda, & j=i+1,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

由于泊松过程在 i 的停留时间服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$，所以其数学期望 λ^{-1} 是质点在 i 的平均停留时间. λ 越大，泊松过程由 i 向 $i+1$ 转移得越快. 于是称 λ 为 i 的转移速率和转移强度. 这样 $p'_{i,i+1}(0)=q_{i,i+1}=\lambda$ 表明质点从 i 出发，下一步向 $i+1$ 转移的速率是 λ. 对于 $j\ne i$ 和 $i+1$，$p'_{ij}(0)=q_{ij}=0$ 表

明质点从 i 出发，下一步向 j 转移的速率是 0，也就是说不会由 i 转向 j. 称 $p'_{ii}(0)=-\lambda$ 为质点停留在 i 的速率.

引入矩阵

$$Q=(q_{ij})_{i,j\in I}=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

人们称 Q 为泊松过程 $\{N(t)\}$ 的**转移速率矩阵**或 **转移强度矩阵**，或简单地称为 Q **矩阵**. 可以把转移速率矩阵写成若当矩阵的形式

$$Q=(-\lambda)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

用归纳法容易验证

$$Q^k=(-\lambda)^k\begin{pmatrix}C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & C_k^2(-1)^2 & C_k^3(-1)^3 & \cdots\\ 0 & C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & C_k^2(-1)^2 & \cdots\\ 0 & 0 & C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix},$$

其中对于 $j<0$ 或 $j>k$，规定 $C_k^j=0$. 定义

$$q_{ij}^{(k)}=(-\lambda)^kC_k^{j-i}(-1)^{i-j},\ k\geq 1,\ i,j\in I,$$

利用 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$，我们有

$$Q^k=(q_{ij}^{(k)}),\ Q^0=\text{单位矩阵},$$

并且对于 $j\geq i$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}q_{ij}^{(k)}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda^{j-i}C_k^{j-i}(-\lambda)^{k+i-j}\\ &=\sum_{k=j-i}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)![k-(j-i)]!}(-\lambda t)^{k-(j-i)}\\ &=\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}\\ &=p_{ij}(t).\end{aligned}$$

写成矩阵的形式就得到

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(q_{ij}^{(k)})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tQ)^k.$$

形式上也可以把上式写成指数函数

$$P(t)=e^{tQ}.$$

注意对上面两式求导数我们就得到 $P'(0)=Q$.

第 22 讲　转移速率矩阵

对于泊松过程 $\{N(t)\}$，有

$$P(N(s,t+s]<\infty)=1,\ s,t\geq 0.$$

这说明在概率 1 的意义下，泊松过程在任何有限的时间内只有有限次转移，因为在转移点事件已经发生，所以轨迹是右连续的.

对于一般的连续时间马尔科夫链，我们称其为**规则马氏链**，如果在概率 1 意义下，有限时间内只能转移有限次. 规则马氏链 $\{X(t)\}$ 的轨迹是阶梯函数. 因为在跳跃点质点已经到达新的状态，所以规则马氏链的轨迹也是右连续的，即对 $t\geq 0$，

$$\lim_{h\downarrow 0}P(|X(t+h)-X(t)|\geq\epsilon)=0.$$

此后无特殊声明，马氏链都是规则马氏链.

用 $P_i(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot|X(0)=i)$，于是我们得到对于任何 $\epsilon>0$，

$$\lim_{h\downarrow 0}P_i(|X(t+h)-X(t)|\geq\epsilon)\leq\lim_{h\downarrow 0}\frac{P(|X(t+h)-X(t)|\geq\epsilon)}{P(X(0)=i)}=0,\ i\in I.$$

引理 22.1

设 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续和非负，满足 $g(0)=0$，$g(t+s)\leq g(t)+g(s)$，$s,t\geq 0$，则存在极限

$$q=\lim_{t\downarrow 0}\frac{g(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{g(t)}{t}\in[0,\infty].$$

证明. 对于 $0<h<t$，有正整数 n 和 $s\in(0,h)$ 使得 $t=nh+s$. 由

$$g(t)/t\leq ng(h)/t+g(s)/t=(g(h)/h)(nh/t)+g(s)/t$$

知道当 $h\to 0$ 时，$g(t)/t\leq\liminf_{h\downarrow 0}g(h)/h$. 这就得到

$$\limsup_{h\downarrow 0}g(t)/t\leq\sup_{t>0}g(t)/t\leq\liminf_{h\downarrow 0}g(h)/h.$$ □

定理 22.2

对于状态空间为 I 的马氏链 $\{X(t)\}$，有以下结论：

(1) $p_{ij}(t)$ 在 t 连续：

$$\lim_{t\downarrow 0}p_{ij}(t)=p_{ij}(0);$$

(2) 我们有

$$\sum_{j\in I}|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leq 2(1-p_{ii}(h)),$$

从而 $p_{ij}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续；

(3) 对于 $t\geq 0$，恒有 $p_{ii}(t)>0$；

(4) $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 有**右导数**

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{p_{ij}(t)-p_{ij}(0)}{t}=q_{ij},$$

其中 $-\infty \le q_{ii} \le 0$，当 $i \neq j$ 时，$q_{ij} \ge 0$；

(5) 对于 $i \in I$，有

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} \le |q_{ii}|.$$

证明. (1) 对于 $\epsilon \in (0,1)$，利用 $p_{ii}(0) = 1$ 得到 $t \downarrow 0$ 时，

$$|p_{ii}(0) - p_{ii}(t)| = 1 - P_i(X(t) = i) = P_i(X(t) \neq i) = P_i(|X(t) = X(0)| \ge \epsilon) \to 0.$$

对于 $j \neq i$，利用 $p_{ij}(t) + p_{ii}(t) \le 1$ 知道 $t \downarrow 0$ 时，

$$0 \le p_{ij}(t) \le 1 - p_{ii}(t) \to 0.$$

(2) 利用 $p_{ij}(t) \le 1$ 和 K-C 方程我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| &= \sum_{j\in I} \Big|\sum_{k\neq i}(p_{ik}(h)p_{kj}(t) + (1-p_{ii}(h))\sum_{j\in I} p_{ij}(t))\Big| \\
&\le \sum_{k\neq i}\sum_{j\in I} p_{ik}p_{kj}(t) + (1-p_{ii}(h))\sum_{j\in I} p_{ij}(t) \\
&= \sum_{k\neq i} p_{ik}(h) + 1 - p_{ii}(h) \\
&= 2(1-p_{ii}(h)).
\end{aligned}$$

(3) 由 (1) 知道当 n 充分大时 $p_{ii}(t/n) > 0$，于是

$$p_{ii}(t) = \left[p_{ii}(\frac{t}{n})\right]^n > 0.$$

(4) 先考虑 $i = j$ 的情形. 定义 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数 $g(t) = -\ln p_{ii}(t)$，有 $g(0) = 0$ 和

$$g(t+s) = -\ln p_{ii}(t+s) \le -\ln(p_{ii}(t)p_{ii}(s)) = g(t) + g(s).$$

由引理 22.1，我们知存在 $q_i \in [0,\infty]$ 使得

$$q_i := \sup_{t>0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{g(t)}{t}, \tag{22.1}$$

注意到当 $t \downarrow 0$ 时，$g(t) \to 0$，我们有

$$\frac{p_{ii}(t)-1}{t} = \frac{e^{-g(t)}-1}{t} = \frac{g(t)}{t}\frac{e^{-g(t)}-1}{g(t)} \to -q_i.$$

取 $q_{ii} = -q_i$ 就得到结论.

(5) 对于任何正整数 m，利用

$$\begin{aligned}
\sum_{j\neq i, j\le m} q_{ij} &= \lim_{t\downarrow 0} \sum_{j\neq i, j\le m} \frac{p_{ij}(t)}{t} \\
&\le \lim_{t\downarrow 0} \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii},
\end{aligned}$$

从而得证. □

推论 22.3

定义 $q_i = -q_{ii}$.

(1) 如果 $q_i = 0$，则对所有的 $t \geq 0$，$p_{ii}(t) = 1$；

(2) $q_i = \sup_{t>0}(1 - p_{ii}(t))/t$.

证明. (1) 由 (22.1) 我们有

$$\sup_{t>0} \frac{g(t)}{t} = \sup_{t>0} \frac{-\ln p_{ii}(t)}{t} = q_i = 0,$$

所以 $p_{ii}(t) = 1$ 对一切 $t \geq 0$ 成立.

(2) 由 (22.1) 我们有 $g(t)/t \leq q_i$，所以有

$$p_{ii}(t) = \exp\big(-\frac{g(t)}{t}t\big) \geq e^{-q_i t}.$$

因为 $t \geq 0$，所以有不等式 $1 - e^{-q_i t} \leq q_i t$ 我们有

$$\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \leq \frac{1 - e^{-q_i t}}{t} \leq q_i.$$

再结合 $p'_{ii}(0) = -q_i$ 就得到结论 (2). □

由于 $p_{ij}(t)$ 是马氏链从 i 出发，t 时处于 j 的概率，所以称 $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ 是质点从 i 出发，下一步向 j 转移的概率或强度，称

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in I}$$

为马氏链的**转移速率矩阵**或**转移强度矩阵**.

由于 q_{ij} 是转移概率 $p_{ij}(t)$ 在 $t = 0$ 的导数，所以又称 Q 为马氏链的**无穷小矩阵**，或简单地称为 **Q 矩阵**.

第 23 讲　马氏链的结构

23.1　保守马氏链

定义 23.1

如果对于一切 $i \in I$，有

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = |q_{ii}| < \infty,$$

则称转移速率矩阵 Q 或马氏链是 **保守的**.

因为 $q_{ii} = p'_{ii}(0) \leq 0$，所以当所有的 $|q_{ii}| < \infty$ 时，保守性等价于

$$\sum_{j \in I} q_{ij} = 0,\ \ i \in I.$$

如果将 q_{ii} 视为马氏链从 i 出发，下一步继续留在 i 的速率，将 $\sum_{j \neq i} q_{ij}$ 视为从 i 出发，下一步离开 i 的速率，保守性说明继续停留的速率和转出的速率大小相等，方向相反.

如果 $q_{ii} = 0$，由推论 22.3 我们知对一切 $t > 0$，

$$p_{ii}(t) = P(X(t) = i|X(0) = i) = 1.$$

这说明 i 是**吸引状态**：质点一旦到达状态 i 就不再离开. 已知 $X(0) = i$ 时，用

$$\tau = \inf\{t|X(t) \neq i\}$$

表示质点在 i 的停留时间，则从 $q_{ii} = 0$ 得到 $P_i(\tau = \infty) = 1$.

命题 23.2

对于马氏链 $\{X(t)\}$, $q_i = |q_{ii}|$ 和 $t, h > 0$，有以下结论：

(1) $P(X(t+h) = j|X(u) = i, u \in [0,t]) = p_{ij}(h)$；

(2) $P(X(u) = i, u \in [0,t]|X(0) = i) = e^{-q_i t}$.

证明. (1) 已知 $X(t) = i$ 的条件下，$X(t+h)$ 和 $\{X(u), u \in [0,t)\}$ 独立，于是有

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = j|X(u) = i, u \in [0,t]) &= P(X(t+h) = j|X(t) = i, X(u) = i, u \in [0,t)) \\ &= P(X(t+h) = j|X(t) = i) \\ &= p_{ij}(h). \end{aligned}$$

(2) $q_i = 0$ 是结论显然成立. 只需对 q_i 是正数的情况证明. 集合列 $B_n = \{jt/2^n|1 \leq j \leq 2^n\}$ 单调增加. 事件列

$$A_n = \{X(jt/2^n) = i, 1 \leq j \leq 2^n\} = \{X(u) = i, u \in B_n\}$$

单调减小：$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. 因为 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 在 $[0,t]$ 中稠密，$X(t)$ 的轨迹又是阶梯形状和右连续的，所以

$$\{X(u) = i, u \in [0,t]\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n\ a.s..$$

利用概率的连续性我们有

$$\begin{aligned}P(X(u)=i,u\in[0,t]|X(0)=i) &= \lim_{n\to\infty} P(A_n|X(0)=i)\\ &= \lim_{n\to\infty} P(X(jt/2^n),1\le j\le 2^n|X(0)=i)\\ &= \lim_{n\to\infty}[p_{ii}(t/2^n)]^{2^n} = \lim_{n\to\infty}[p_{ii}(t/n)]^n\\ &= \lim_{n\to\infty}[p_i i(0)+p'_{ii}(0)(t/n)+o(t/n)]^n\\ &= \lim_{n\to\infty}[1-q_it/n+o(t/n)]^n\\ &= e^{-q_it}.\end{aligned}$$

□

回忆我们已经规定 $1/0=\infty$，$0/0=0$.

定理 23.3

对于连续时间马氏链 $\{X(t)\}$，$q_i=|q_{ii}|$，用 τ 表示质点在状态 i 的停留时间，则有

(1) $P(\tau>t|X(0)=i)=e^{-q_it}$，$t\ge 0$；

(2) $E[\tau|X(0)=i]=1/q$；

(3) 当 $j\ne i$ 时，$P(X(\tau)=j,\tau\le t|X(0)=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}(1-e^{-q_it})$；

(4) 当 $j\ne i$ 时，$P(X(\tau)=j|X(0)=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}$；

(5) 在条件 $X(0)=i$ 下，τ 和 $X(\tau)$ 独立；

(6) 当所有的 $q_i<\infty$ 时，马氏链 $\{X(t)\}$ 是保守的.

证明. 只需对 q_i 是整数的情况证明.

(1) 由命题 23.2 (2) 我们有：

$$P(\tau>t|X(0)=i)=P(X(u)=i,u\in[0,t]|X(0)=i)=e^{-q_it}.$$

(2) 结论 (1) 说明在条件 $X(0)=i$ 下，$\tau\sim\mathcal{E}(q_i)$，所以有

$$E(\tau|X(0)=i)=1/q_i.$$

(3) 重新定义 $B_n=\{jt/2^n|1\le j\le 2^n-1\}$, $A_n=\{X(u)=i,u\in B_n\}$. A_n 单调减少，使得

$$\{X(u)=t,u\in[0,t)\}=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_n.$$

对于 t，$\Delta t>0$ 和 $j\ne i$，由 Taylor 展开公式

$$P(X(t)=j|X(t-\Delta t)=i)=p_{ij}(\Delta t)=q_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$$

我们知

$$\lim_{\Delta t\to 0}P(X(t)=j|X(t-\Delta t)=i)=q_{ij}dt.$$

取 $\Delta = t/2^n$，得到

$$\begin{aligned}
&P(X(\tau)=j,\tau=t|X(0)=i)\\
=&P(\{X(u)=i,u\in[0,t)\},X(t)=j|X(0)=i)\\
=&\lim_{n\to\infty}P(A_n,X(t)=j|X(0)=i)\\
=&\lim_{n\to\infty}P(A_n|X(0)=i)P(X(t)=j|A_n,X(0)=i)\\
=&\lim_{n\to\infty}[P(t/2^n)]^{2^n-1}P(X(t)=j|X(t-\Delta t)=i)\\
=&\lim_{n\to\infty}(1-q_it/2^n+o(t/2^n))^{2^n-1}(q_{ij}\Delta t+o(\Delta t))\\
=&e^{-1_it}q_{ij}dt.
\end{aligned}$$

(4) 在 (3) 中让 $t\to\infty$ 可得.

(5) 这时 $p_j = q_{ij}/q_i$ 是 $X(\tau)|X(0) = i$ 的概率分布. 由 (1) 知道 $P_i(\tau \le t) = 1 - e^{-q_it}$. 引入 $P_i(\cdot) = P(\cdot|X(0) = i)$，用 (3) 和 (4) 得到

$$P_i(X(\tau)=j,\tau\le t)+P-i(X(\tau)=j)P_i(\tau\le t),\ t\ge 0.$$

(6) 当 $q_i = 0$ 时，我们知 $\sum_{j\in I} q_{ij} = 0$. 当 $q_i > 0$ 时，由 (1) 和 (4) 知 $\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i$. □

由上面定理，我们知当 $q_i = \infty$ 时，有 $\overline{G}(t) = P(\tau > t|X(0) = i) =\equiv 0$，于是 $P(\tau = 0|X(0) = i) = 1$. 这说明质点在状态 i 无法停留，所以称 i 为**瞬时状态**. 我们后面只考虑所有状态均非瞬时状态的情形：$q_i = |q_{ii}| < \infty$.

23.2 马氏链的结构

设马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移速率矩阵 Q, $q_i = |q_{ii}|$. 定义

$$k_{ij}=\begin{cases} q_{ij}/q_i, & \text{当 } q_i>0,\ j\neq i \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } q_i>0,\ j=i \text{ 时},\\ \delta_{ij}, & \text{当 } q_i=0 \text{ 时},\end{cases}$$

则 $K = (k_{ij})$ 的各行之和为 1. 定义

$$\begin{aligned}
&\tau_0=0\\
&\tau_1=\inf\{t>0|X(t)\neq X(0)\},\\
&\tau_2=\inf\{t>\tau_1|X(t)\neq X(\tau_1)\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\tau_n=\inf\{t>\tau_{n-1}|X(t)\neq X(\tau_{n-1})\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

则 τ_i 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的第 i 次转移时刻. $T_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ 是第 i 次转移后的停留时间. 我们有下面的结果：

(1) $X_n = X(\tau_n)(n = 0, 1, \cdots)$ 是以 $K = (k_{ij})$ 为一步转移概率矩阵的离散时间马氏链；

(2) 沿着嵌入链 $\{X(\tau_n)\}$ 的给定轨迹 $i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots$，马氏链各状态的依次停留时间 $T_0, T_1, \cdots$ 相互独立，T_j 服从指数分布 $\mathcal{E}(q_{ij})$，$j = 0, 1, 2, \cdots$；

(3) 设 $\{Y_n\}$ 是离散时间马氏链，以前面定义的 $K=(k_{ij})$ 为转移概率矩阵. 对每个 $i\in I$，假设质点每次到达 i 后，在 i 的停留时间是相互独立的随机变量，服从共同的指数分布 $\mathcal{E}(q_i)$，停留结束时以概率 k_{ij} 转移到状态 j $(j\neq i)$. 进一步假设质点在不同状态的停留时间相互独立，则用 $X(t)$ 表示 t 时质点的状态时，$X(t)$ 是连续时间的马氏链，有转移速率矩阵 Q.

在上面 (1) 中，称离散时间马氏链 $\{X_n\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的**嵌入链或跳跃链**. 同理上面的 (3) 中也称离散时间马氏链 $\{Y_n\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的嵌入链.

例 23.4

强度为 λ 的泊松过程是马氏链，嵌入链有一步转移概率

$$k_{ij}=\begin{cases}1, & j=i+1\geq 1,\\ 0, & j\neq i+1.\end{cases}$$

质点在任何状态的停留时间是相互独立的，服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$，所以 $q_i=\lambda$. 于是

$$q_{ij}=\begin{cases}-\lambda, & j=0\geq 0,\\ \lambda, & j=i+1\geq 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

第 24 讲　柯尔莫哥洛夫方程

24.1　向后和向前方程

回忆 K-C 方程是

$$p_{ij}(t+s)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)p_{kj}(s),\ i,j\in I.$$

让我们约定把右边称为前，把左边称为后. 在上式两边对于 t 在 $t=0$ 处求导数，形式上得到

$$p'_{ij}(s)=\sum_{k\in I}q_{ik}p_{kj}(s).$$

写成矩阵的形式就得到 $P'(t)=QP(t)$. 如果对于 s 在 $s=0$ 处求导，形式上得到

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)q_{kj}.$$

写成矩阵的形式就得到 $P'(s)=P(s)Q$.

定理 24.1

设 Q 是连续时间马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移速率矩阵，$q_i=|q_{ii}|$，则有

(1) $P'(t)=QP(t)$，或等价地写成

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in I}q_{ik}p_{kj}(t),\ i,j\in I;$$

(2) 当 $q=\sup\{q_i|i\in I\}<\infty$ 时，有 $P'(t)=P(t)Q$，或等价地写成

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t)q_{kj},\ i,j\in I.$$

24.2　解柯尔莫哥洛夫方程

设右连续函数 $g(t)$ 满足

$$g(t+s)=g(t)g(s)>0,\ s,t>0,$$

则 $g(t)$ 是指数函数，即

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(ct)^k=e^{ct},\ g'(t)=cg(t),\ c=g'(0).$$

于是得到

$$g(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(g'(0)t)^k=\exp(g'(0)t).$$

对于方阵 A，当 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k/k!$ 的每个元收敛时，定义

$$e^A=\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k,\ A^0=\text{单位矩阵}.$$

对于马氏链的转移概率矩阵 $P(t)$ 和转移速率矩阵 Q，由 K-C 方程我们得

$$P(t+s)=P(t)P(s),\ s,t\geq 0,$$

所以我们也期望有某个矩阵 C，使得

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Ct)^k\equiv\exp(Ct),$$

其中 $(Ct)^0$ 表示单位阵. 因为 $P'(0)=Q$，所以猜测应当有 $C=Q$ 和

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Qt)^k\equiv\exp(Qt). \tag{24.1}$$

如果马氏链 $\{X(t)\}$ 的状态空间 I 是有限集合，则称 $\{X(t)\}$ 是有限状态马氏链. 设状态空间 I 有 n 个状态，取

$$q=\max_{i,j\in I}|q_{ij}|=\max_{i\in I}q_i,$$

则矩阵 $(Qt)^k$ 的元素绝对值都小于 $n^{k-1}(qt)^k$. 于是

$$\exp(Qt)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Qt)^k$$

的每个元收敛，关于 t 逐项求导得到

$$\begin{aligned}(\exp(Qt))'&=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Qt)^k)'\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(Qt)^{k-1}Q\\&=\exp(Qt)Q,\ \ t\in(-\infty,\infty).\end{aligned}$$

定理 24.2

有限状态连续时间马氏链转移概率矩阵 $P(t)$ 由转移概率矩阵 Q 唯一决定，并且有

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Qt)^k\equiv\exp(Qt),t\geq 0.$$

证明. 由方程 (24.1) 我们知 $P(t)=\exp(Qt)$ 满足 $P'(t)=\exp(Qt)Q=P(t)Q$，所以是向前方程的解. 下面证明它是向前方程的唯一解.

如果 $P(t)$ 满足向前方程 $P'(t)=P(t)Q$，且 $P(0)$ 是单位阵，我们证明 $P(t)=\exp(Qt)$. 利用公式

$$(A(t)B(t))'=A'(t)B(t)+A(t)B'(t)$$

和向前方程我们有

$$\begin{aligned}(P(t)\exp(-Qt))'&=P'(t)\exp(-Qt)-P(t)Q\exp(-Qt)\\&=(P'(t)-P(t)Q)\exp(-Qt)=0.\end{aligned}$$

这说明 $P(t)\exp(-Qt)=C$ 是常数矩阵. 再由 $P(0)=$ 单位矩阵 我们有

$$\text{单位阵}=P(t)\exp(-Qt).$$

两边右乘 $\exp(Qt)$，得到

$$\begin{aligned}
\exp(Qt) &= P(t)\exp(-Qt)\exp(Qt) \\
&= P(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-Qt)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(Qt)^j \\
&= P(t)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{k!(j-k)!}t^k(-t)^{j-k}Q^j \\
&= P(t)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(\sum_{k=0}^{j}C_j^k t^k(-t)^{j-k})Q^j \\
&= P(t)\sum_{j=0}^{\infty}j!(t-t)^jQ^j \\
&= P(t).
\end{aligned}$$

这就证明了向前方程有唯一解

$$P(t)=\exp(Qt).$$

Q 唯一决定了 $P(t)$. □

例 24.3

给定连续时间马氏链的转移速率矩阵

$$Q=P'(0)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-9 & 3 & 6\\ 6 & -12 & 6\\ 6 & 3 & -9\end{pmatrix}$$

计算转移概率矩阵.

证明. 我们先将 Q 写成若当标准型

$$Q=MDM^{-1},$$

其中 D 为 Q 的若当标准型，M 为可逆矩阵，用线性代数的方法我们可以求得：

$$D=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ M^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

这样得到 $Q^k=MD^kM^{-1}$，于是得到

$$\begin{aligned}
P(t)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Qt)^k=M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Qt)^kM^{-1} \\
&=M\begin{pmatrix}e^{-3t} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{pmatrix}M^{-1} \\
&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2+3e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 2-2e^{-3t}\\ 2-2e^{-3t} & 1+4e^{-3t} & 2-2e^{-3t}\\ 2-2e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 2+3e^{-3t}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

定理 24.4

马氏链的转移概率 $p_{ij}(t)$ 满足柯尔莫哥洛夫向前和向后方程，而且是向后或向前方程的唯一解.

第 25 讲　生灭过程

25.1　引入

对于任意 $t \geq 0$，若已知 t 时存活的生物个体在 $(t, t+h]$ 内发生分裂的概率是 $\lambda h + o(h)$，则这个生物的寿命 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. 实际上，引入生存函数 $\overline{F}(t) = P(T > t)$，根据题意得到

$$\begin{aligned} P(t < T \leq t+h | T > t) &= \frac{P(t < T \leq t+h)}{P(T > t)} \\ &= \frac{\overline{F}(t) - \overline{F}(t+h)}{\overline{F}(t)} = \lambda h + o(h). \end{aligned}$$

将上式的 t 换成 $t-h$，得到

$$\frac{\overline{F}(t-h) - \overline{F}(t)}{\overline{F}(t-h)} = \lambda h + o(h), \ t > 0.$$

对上面两公式的左右两边同时除以 h，再令 $h \downarrow 0$，得到

$$\frac{d}{dt} \ln \overline{F}(t) = \frac{\overline{F}'(t)}{\overline{F}(t)} = -\lambda.$$

积分后得到 $\ln \overline{F}(t) = -\lambda t$. 于是 $\overline{F}(t) = e^{-\lambda t}$ 成立. 这说明 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

对于任意 $t \geq 0$，如果 t 时有 m 个生物，第 i 个生物在 $(t, t+h]$ 内分裂的概率是 $\lambda_i h + o(h)$，用 T_i 表示从 t 开始等待第 i 个生物分裂的时间，我们有 $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$，$T_1, T_2, \cdots, T_m$ 相互独立. 由命题 3.29 我们知从 t 开始等待第一个分裂的时间 $T = \min(T_1, T_2, \cdots, T_m) \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)$.

25.2　线性生灭过程

例 25.1

一个 t 时存活的生物个体在 $(t, t+h]$ 内分裂情况与其在 t 时的年龄无关，且满足：当 $h \to 0$ 时，

(1) 在 $(t, t+h]$ 内死亡的概率为 $\mu h + o(h)$；

(2) 在 $(t, t+h]$ 内不死亡也不分裂的概率为 $1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$；

(3) 在 $(t, t+h]$ 内分裂一次成为两个个体的概率为 $\lambda h + o(h)$.

该生物的每个后代也按照相同的方式相互独立地分裂自己的后代. 用 $X(t)$ 表示 t 时生物的总数，称随机过程 $\{X(t)\}$ 为 **线性生灭过程**，称 μ 为生物个体的死亡强度，λ 为生物个体的出生强度.

首先注意到注意对生物个体而言，除情况 (1)，(2)，(3) 外，在 $(t, t+h]$ 中发生其他分裂情况的概率是 $o(h)$. 从前面的分析和条件 (2) 知道 $\{X(t)\}$ 在状态 i 的停留时间服从参数为 $i(\lambda + \mu)$ 的指数分布.

已知 $X(t) = i$ 时，由指数分布的无记忆性知道这 i 个生物相互独立地分裂自己的后代，并与 t 时各自的年龄无关，从而与时间 t 之前这 i 个生物是如何演变来的无关. 所以 $\{X(t)\}$ 是马氏链，状态空间 $I = \{0, 1, \cdots\}$.

对于 $h > 0$，一个生物在时间区间 $(t, t+h)$ 内分裂成两次或更多次的概率是 $o(h)$，它等于 1 减去 (1)，

(2) 和 (3) 中所列出的所有概率. 于是有

$$\begin{aligned}
&p_{00}(h)=1\ (\text{生物不能凭空产生})\\
&p_{10}(h)=\mu h+o(h),\\
&p_{11}(h)=1-(\lambda+\mu)h+o(h),\\
&p_{12}(h)=\lambda h+o(h),\\
&p_{1j}(h)=o(h),\ j>2.
\end{aligned}$$

对于 $i>1$，因为个体们相互独立地分裂自己的后代，所以按二项分布的想法计算出

$$\begin{aligned}
p_{ii-1}(h)&=C_i^1p_{10}(h)(p_{11}(h))^{i-1}+o(h)=i\mu h+o(h),\\
p_{ii}(h)&=(p_11(h))^i+o(h)=1-i(\lambda+\mu)h+o(h).\\
p_{ii+1}(h)&=C_i^1p_{12}(h)(p_{11}(h))^{i-1}+o(h)=i\lambda h+o(h),\\
p_{ij}(h)&=o(h),\ \text{当}\ |j-i|\geq 2.
\end{aligned}$$

根据 $q_{ij}=p_{ij}'(0)$ 计算出

$$Q=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\
0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda+\mu) & 3\lambda & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}$$

因为 Q 的各行之和为 0，Q 是保守的. 称为线性生灭过程的原因是 $q_i=i(\lambda+\mu)$ 为 i 的线性函数.

$q_{00}=0$ 说明 0 是吸引状态，故 $k_{00}=1$. 我们可以算出嵌入链的一步转移矩阵

$$K=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots\\
0 & q & 0 & p & 0 & \cdots\\
0 & 0 & q & 0 & p & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix},$$

其中

$$p=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},\ q=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

我们知嵌入链 $\{X_n\}$ 是 $I=\{0,1,2,\cdots\}$ 中的有吸收壁 0 的简单随机游动，质点每次向右移动的概率为 p，向左移动一步的概率是 $q=1-p$. 嵌入链的状态 $\{1,2,\cdots\}$ 是互通的，但不是常返的，说明生物总数或者发展到无穷，或者最终消亡. 生物个体的寿命是来自指数总体 $\epsilon(\lambda+\mu)$ 的随机变量.

对于线性生灭过程 $\{X(t)\}$ 来讲，已知 $X(t)=k$ 时，用 τ_i 表示第 i 个个体的剩余寿命，则需要等待时间

$$T_k=\min\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k\}$$

才能再增加或减少一个个体. 因为 $\tau_1,\tau_2,\cdots_k$ 相互独立，都服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda+\mu)$，所以 $T_k\sim\mathcal{E}(k(\lambda+\mu))$. 数学期望 $E[T_k]=1/[k(\lambda+\mu)]$ 为马氏链在状态 k 的平均停留时间. k 越大，平均等待时间越短.

对于 $j_0>0$ 和嵌入链的轨迹 $j_0\to j_1\to j_2\to\cdots$，$j_i>0$，因为每次最多增加一个个体，所以有

$$j_i\leq j_0+i,\ i=0,1,2,\cdots.$$

马氏链在 j_i 的平均停留时间

$$E[T_{j_k}] = \frac{1}{j_i(\lambda+\mu)} \geq \frac{1}{(j_0+i)(\lambda+\mu)}.$$

对于嵌入链的上述轨迹，有

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[T_{j_k}] \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(j_0+i)(\lambda+\mu)} = \infty.$$

于是我们知要保证线性生灭过程走完上述轨迹，需要无穷长的时间. 所以在任何有限的时间内线性生灭过程不会“爆炸”，即线性生灭过程是规则的.

进一步的研究还可以得到一下结果：

$$p_{10}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mu - \mu e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}} & \lambda \neq \mu, \\ \dfrac{\lambda t}{1+\lambda t}, & \lambda = \mu. \end{cases}$$

于是得到

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t)=0|X(0)=1) = \begin{cases} \mu/\lambda, & \lambda > \mu, \\ 1, & \lambda \leq \mu. \end{cases}$$

在条件 $X(0)=1$ 下，还可以计算出

$$E[X(t)] = e^{(\lambda-\mu)t},$$

$$\mathrm{Var}(X(t)) = \begin{cases} \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu} e^{(\lambda-\mu)t}(e^{(\lambda-\mu)t}-1), & \lambda \neq \mu, \\ 2\lambda t, & \lambda = \mu. \end{cases}$$

于是得到

$$\lim_{t\to\infty} E[X(t)] = \begin{cases} 0, & \lambda < \mu, \\ 1, & \lambda = \mu, \\ \infty, & \lambda > \mu; \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}(X(t)) = \begin{cases} 0, & \lambda < \mu, \\ \infty, & \lambda \geq \mu. \end{cases}$$

25.3 生灭过程

下面是更一般的生灭过程.

例 25.2

设 $\{\lambda_i | i \geq 0\}$，$\{\mu_i | i \geq 1\}$ 是非负数列，满足 $\lambda_i + \mu_i > 0$. 如果马氏链 $\{X(t)\}$ 有状态空间 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 和转移速率矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

则称 $\{X(t)\}$ 是**生灭过程**，λ_i 为**出生率**，μ_i 是**死亡率**. 这时嵌入链 $\{X_n\}$ 有一步转移概率矩阵

$$K = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中 $p_0 = 1 - q_0$，

$$q_0 = \begin{cases} 1, & \lambda_0 = 0, \\ 0, & \lambda_0 > 0, \end{cases} \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \ q_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \ i \geq 1.$$

嵌入链是非负整数中的随机游动，嵌入链每次向右或向左移动一步. 生灭过程描述如下：已知 t 时有 $i \geq 1$ 个生物时，再等待时间 T_i 后，以概率 p_i 增加一个生物，或以概率 q_i 减少一个生物. 这里 $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i + \mu_i)$.

25.4 线性纯生过程

例 25.3

在生灭过程中，如果 $\mu = 0$，生物就不会死亡，转移速率矩阵就简化成

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

这时的马氏链称为**线性纯生过程**.

对于线性纯生过程而言，生物的寿命是来自总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量. 每个生物在寿终称两个新的生物，新生物按照上一代的方式再独立地分裂各自的后代. 容易计算出线性纯生过程的嵌入链有一步转移概率

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} j = i = 0 \text{ 或 } j = i + 1 \geq 2 \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对于线性纯生过程，用 T_i 表示已知有 i 个生物的条件下，等待下一次分裂的时间，则 $T_i \sim \mathcal{E}(i\lambda)$，$T_1, T_2, \cdots$ 相互独立. 在条件 $X(0) = 1$ 下，引入

$$S_0 = 0, \ S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k, \ k \geq 1.$$

S_k 表示第 k 次分裂的时间. 下面推导公式

$$P(S_k \leq t | X(0) = 1) = (1 - e^{-\lambda t})^k, \ k \geq 1.$$

我们用归纳法. 引入条件概率 $P_1(\cdot) = P(\cdot | X(0) = 1)$. 当 $k = 1$ 时，我们有

$$P_1(S_1 \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}.$$

设结论对于 $k-1$ 成立，则有

$$\begin{aligned}
P_1(S_k \le t) &= P(S_{k-1} + T_k \le t) \\
&= \int_0^t P_1(S_{k-1} + s \le t | T_k = s) dP_1(T_k \le s) \\
&= \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-s)})^{k-1} \lambda k e^{-\lambda k s} ds \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j (-1)^j \int_0^t e^{-\lambda j(t-s)} \lambda k e^{-\lambda k s} ds \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j (-1)^j (e^{-\lambda j t} - e^{-\lambda k t}) \\
&= (1 - e^{-\lambda t})^k.
\end{aligned}$$

于是得证. 这样可以得到线性纯生过程的一步转移概率

$$\begin{aligned}
p_{1j}(t) &= P_1(X(t) = j) = P_1(S_{j-1} \le t < S_j) \\
&= P_1(S_{j-1} \le t) - P_1(S_j \le t) \\
&= (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} - (1 - e^{-\lambda t})^j \\
&= (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} e^{-\lambda t} \\
&= \beta^{j-1}\alpha, \ j \ge 1,
\end{aligned}$$

其中 $\alpha = e^{-\lambda t}$, $\beta = 1 - \alpha$. 于是在条件 $X(0) = 1$ 下，对于固定的 $t > 0$，$x(t)$ 服从参数为 $\alpha = e^{-\lambda t}$ 的几何分布，有数学期望

$$E[X(t)|X(0) = 1] = 1/\alpha = e^{\lambda t}.$$

当一开始有 i 个生物个体时，用 Y_k 表示第 k 个个体在 t 时的后代数，则 Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_i 独立同分布，都服从相同的几何分布

$$P(Y_k = j) = P_{1j}(t) = \beta^{j-1}\alpha, \ j \ge 1.$$

于是 t 时的生物总数 $x(t) = \sum_{k=1}^i Y_i$ 服从负二项分布：

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i) = C_{j-1}^{i-1} \beta^{j-1} \alpha^i, \ j \ge i \ge 1.$$

在条件 $X(0) = i$ 下，$X(t)$ 有数学期望 $E[X(t)|X(0) = i] = ie^{\lambda t}$.

线性纯生过程又称为 **尤尔过程**.

25.5 简单的传染病模型

例 25.4

m 个同种生物中有若干个体带菌，所有个体的行为独立. 在长为 h 的时间中，任何两个个体相遇的概率为 $\lambda h + o(h)$. 不带菌者遇到带菌者即被传染，被传染的个体将永远带菌，并以相同的方式传染其他不带菌的个体. 当 $t = 0$ 时有 i 个带菌者，计算

(1) 在时间 $(0, h]$ 内新增加一个带菌者的概率；

(2) 在时间 $(0, h]$ 内无新增带菌者的概率；

(3) 如果从 $t = 0$ 开始，等待时间 T_i 后新增加一个带菌者，求 T_i 的分布和数学期望；

(4) 如果 $t=0$ 时只有一个带菌者，平均等待多长时间可以使整个群体带菌？

证明. 用 $P_i(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot|X(0)=i)$.

(1) 对 $k=1,2,\cdots,i, j=1,2,\cdots,m-i$，用 A_{kj} 表示时间 $(0.h]$ 内第 k 个带菌者传染了第 j 个不带菌者. 根据题意，$\{A_{kj}\}$ 相互独立，$P(A_{kj})=\lambda h+o(h)$. $(0,h]$ 内新增加一个带菌者等价于恰有一个 A_{kj} 发生. 因为一共有 $i(m-i)$ 个 A_{kj}，所以

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(h) &= P_i(\text{恰有一个 } A_{kj} \text{ 发生}) \\
&= C^1_{i(m-i)}P(A_{11})[1-P(A_{11})]^{i(m-1)-1} \\
&= i(m-1)(\lambda h+o(h))(1-\lambda h+o(h)^{i(m-1)-1} \\
&= i(m-1)\lambda h+o(h).
\end{aligned}$$

(2) 根据上面的符号，要计算的概率是

$$\begin{aligned}
p_{ii}(h) &= P_i(\text{所有 } A_{kj} \text{ 没发生}) \\
&= (1-P(A_{11}))^{i(m-i)} \\
&= (1-\lambda h+o(h))^{i(m-i)} \\
&= 1-i(m-i)\lambda h+o(h).
\end{aligned}$$

(3) 用 $X(t)$ 表示 t 时带菌者的总数. 因为带菌者的行为独立，等待传染下一个个体的时间具有无记忆性，所以 $\{X(t)\}$ 是马氏链. 对于 $j\geq i+2$，有

$$\begin{aligned}
p_{ij}(h) &\leq \sum_{k=i+2}^{m} p_{ik}(h) = 1-p_{ii}(h)-p_{i,i+1}(h) \\
&= 1-[1-i(m-i)\lambda h+o(h)]-[i(m-i)\lambda h+o(h)] \\
&= o(h).
\end{aligned}$$

由此得到

$$p_{ij}(h)=\begin{cases} 1-i(m-i)\lambda h+o(h), & j=i, \\ i(m-i)\lambda h+o(h), & j=i+1, \\ o(h), & j\geq i+2. \end{cases}$$

于是得到马氏链的转移速率

$$q_{ij}=p'_{ij}(0)=\begin{cases} -i(m-i)\lambda, & j=i, \\ i(m-i)\lambda, & j=i+1>1, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

根据马氏链的运动规律知道 T_i 服从参数为 $q_i=|q_{ii}|$ 的指数分布，有数学期望

$$E[T_i]=\frac{1}{q_i}=\frac{1}{i(m-i)\lambda},\ 1\leq i\leq m-1.$$

(4) 马氏链 $\{X(t)\}$ 是一个状态空间为 $I=\{0,1,\cdots,m\}$ 的纯生过程，从 1 出发到 m 所用的时间为

$T=\sum_{i=1}^{m-1}T_i$，其数学期望是

$$\begin{aligned}ET&=\sum_{i=1}^{m-1}ET_i\\&=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i(m-i)}\\&=\frac{1}{m\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}(\frac{1}{i}+\frac{1}{m-i})\\&=\frac{2}{m\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i}.\end{aligned}$$

对于较大的群体，用近似公式 $\sum_{i=1}^{m-1}i^{-1}\approx\ln(m-1)$，得到

$$ET\approx\frac{2\ln(m-1)}{m\lambda}.$$

注意，$\dfrac{2\ln(m-1)}{m\lambda}$ 是 m 的减函数，这说明群体越密集，传染速度越快. 另外，容易验证 $q_i=i(m-i)\lambda$ 在 $i=[m/2]$ 大于最大，说明有 $[m/2]$ 个带菌者时的传染速率最大，其中 $[m/2]$ 是 $m/2$ 的整数部分. $\square$

第 26 讲　马氏链的极限分布

26.1　$p_{ij}(t)$ 的极限

定义 26.1

设 I 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态.

(1) 如果存在 $t > 0$ 使得 $p_{ij}(t) > 0$，则称 i **通** j，记做 $i \to j$;

(2) 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$，则称 i, j **互通**，记做 $i \leftrightarrow j$;

(3) 如果 I 的所有状态互通，则称 **马氏链** $\{X(t)\}$ **互通**.

命题 26.2

$i \leftrightarrow i$.

命题 26.3

如果 $i \to j$，那么 $j \to i$.

命题 26.4

如果 $i \to j$ 且 $j \to k$，则 $i \to k$.

所以互通关系是一个等价关系. 于是可以把互通的状态放在一起构成等价类.

定理 26.5

如果 $\{X(t)\}$ 是互通马氏链，记 $\mu_j = 1/q_j$，则有

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{\mu_j}{E[T_{jj}]},$$

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{[0,t] \text{ 内马氏链处于 } i \text{ 的时间}}{t}.$$

如果上面定理中的 $\{p_j\}$ 之和为 1，则称 $\{p_j\}$ 是马氏链的 **极限分布**.

26.2　马氏链的 h 骨架和状态分类

定义 26.6

对于任何 $h > 0$，称 $\{X(nh)\} = \{X(nh)|n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为马氏链 $\{X(t)\}$ 的一个**离散骨架**或 **h 骨架**.

命题 26.7

以下的三个命题等价：

(1) $i \to j$；

(2) 对于某个 h 骨架 $i \to j$；

(3) 对于任何离散骨架 $i \to j$.

对于选定的 h 骨架来讲，i 是正常返状态的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh) = \infty.$$

由于所有的状态非周期，所以 i 是正常返状态的充分必要条件是

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} p_{ii}(nh) > 0.$$

命题 26.8

设 $\{X(nh)\}$ 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的 h 骨架，则

(1) i 是 $\{X(nh)\}$ 的常返状态，当且仅当

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(t)dt = \infty;$$

(2) i 是某个 h 骨架的常返状态，当且仅当 i 是一切离散骨架的常返状态.

命题 26.9

如果 i 是某个 h 骨架的正常返状态，则它是所有离散骨架的正常返状态.

定义 26.10

对于马氏链 $\{X(t)\}$，当 i 是某 h 骨架的常返状态时，称 i 是 $\{X(t)\}$ 的常返状态；当 i 是某 h 骨架的非常返状态时，称 i 是 $\{X(t)\}$ 的非常返状态；当 i 是某 h 骨架的正常返状态时，称 i 是 $\{X(t)\}$ 的正常返状态；当 i 是某 h 骨架的零常返状态时，称 i 是 $\{X(t)\}$ 的零常返状态.

26.3 平稳不变分布

定义 26.11

设 $P(t)$ 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵，如果概率分布列 $\boldsymbol{p} = [p_0, p_1, \cdots]$ 满足方程组

$$p_j = \sum_{i\in I} p_i p_{ij}(t),\ j \in I,\ \text{或等价地}\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}P(t),\ t \geq 0,$$

则称 $\boldsymbol{p}$ 是 $\{X(t)\}$ 的**平稳分布**或**平稳不变分布**.

对于互通马氏链，我们知平稳不变分布就是极限分布：$p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$，$j \in I$.

命题 26.12

如果马氏链 $\{X(t)\}$ 以平稳分布 $\boldsymbol{p}$ 为初始分布，$P(X(0)=i)=p_i$，$i\in I$，则

(1) $X(t)$ 和 $X(0)$ 同分布；

(2) $\{X(t)\}$ 是严平稳过程.

定理 26.13

设互通马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移速率矩阵 Q，则

(1) $\{X(t)\}$ 正常返当且仅当 $\{X(t)\}$ 有唯一的平稳不变分布；

(2) $\{X(t)\}$ 正常返当且仅当对某个 j，$p_j=\lim_{i\to\infty}p_{ij}(t)>0$. 当条件成立时，所有的 $p_j==\lim_{i\to\infty}p_{ij}(t)>0$，且构成平稳不变分布；

(3) $\{X(t)\}$ 正常返的充分必要条件是方程组

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{i\in I}p_iq_{ij}=0,\\ \sum_{j\in I}p_j=1,\end{array}\right.\quad \text{或等价地}\quad \left\{\begin{array}{c}pQ=0,\\ \sum_{j\in I}p_j=1\end{array}\right.$$

有唯一非负解 $\boldsymbol{p}$. 这时 $\boldsymbol{p}$ 是 $\{X(t)\}$ 的唯一平稳不变分布；

(4) 若嵌入链有平稳不变分布 $\boldsymbol{\pi}=[\pi_0,\pi_1,\cdots]$，则

$$p_j\equiv\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\frac{\pi_j/q_j}{\sum_{i\in I}\pi_i/q_i},\ j\in I.$$

命题 26.14

对于一个生灭过程，它为非常返的当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_1\cdots\mu_n}{\lambda_1\cdots\lambda_n}<\infty.$$

它是正常返的当且仅当

$$q=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n}<\infty.$$

其中 $n=0$ 时的项默认为 1. 这时平稳不变分布为

$$\pi_n=\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n}q^{-1}.$$

命题 26.15

设正常返的马氏链 $\{X(t)\}$ 是平稳过程，马氏链 $\{Y(t)\}$ 的转移矩阵和 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵相同，则对任意 $m\geq 1$，$t_0<t_1<\cdots<t_m$，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}P(Y(t_0+s)=i_0,Y(t_1+s)=i_1,\cdots,Y(t_m+s)=i_m)\\ =&P(X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_m)=i_m).\end{aligned}$$

例 26.16

内科诊室只有一个医生，医生为每个病人的看病时间是来自指数总体 $\mathcal{E}(\mu)$ 的随机变量. 如果病人按照强度为 λ 的泊松流到达和排队等候，用马氏链描述诊室的总人数 (指正看病的人数 + 排队人数). 在稳定状态下，

(1) 计算平均队长;

(2) 计算病人的平均排队时间;

(3) 计算医生的可用度 (指稳定状态下医生在工作的概率).

解. 用 $X(t)$ 表示 t 时诊室的总人数. 已知 $x(t)=i>0$ 时，用 S 表示等待新到一人所需的时间，用 T 表示离开一人所需的时间，则 S，T 独立，$S\sim\mathcal{E}(\lambda)$, $T\sim\mathcal{E}(\mu)$. $\{X(t)\}$ 在 i 的停留时间为

$$\min\{S,T\}\sim\mathcal{E}(\lambda+\mu),$$

然后分别以概率

$$k_{i,i+1}=P(S<T)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},\ k_{i,i-1}=P(T<S)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

转向 $i+1$, $i-1$. 根据马氏链的结构知道 $\{X(t)\}$ 是马氏链, 且是生灭过程. 利用公式 $q_{ij}=k_{ij}q_i(i\neq j)$ 得到转移速率

$$q_{00}=-\lambda,\ q_{ii}=-(\lambda+\mu),\ i>0;\ q_{i,i+1}=\lambda,\ q_{i,i-1}=\mu.$$

解方程组得到

$$p_k=(1-\frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^k\equiv pq^k,\ k=0,1,\cdots.$$

于是知道只有当 $\lambda<\mu$ 时，马氏链是正常返的，有如上的平稳分布，在稳定状态下的平均队长是

$$EX(t)=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=pq\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{q}{p}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda},\ \lambda<\mu.$$

因为诊室的人数为 $X(t)$，所以 t 时到达的人需要排队的时间为

$$\sum_{k=1}^{X(t)}\tau_k,\ \tau_k\sim\mathcal{E}(\mu).$$

其中 τ_k 是第 k 个人的看病时间. 因为 $X(t)$ 与 $\{\tau_i\}$ 独立，由瓦尔德定理我们有平均排队时间为

$$E[\sum_{k=1}^{X(t)}\tau_k]=E[X(t)]E[\tau_1]=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)},\ \lambda<\mu.$$

医生的可用度为

$$1-p_0=\lambda/\mu.$$

□

第 27 讲　布朗运动

设想在液体的表面建立一个直角坐标系，一粒花粉在时间 $t=0$ 从原点出发作布朗运动，以后将这粒花粉称为质点. 用 $(X(t),Y(t))$ 表示 t 时花粉的位置.

27.1　布朗运动

下面对 $X(t)$ 详加考察. 新建一个坐标系，以时间 t 为横轴，以位移 x 为纵坐标. 当 t 在 $[0,\infty)$ 中变化时，$\{X(t)\}$ 是连续时间的随机过程.

容易理解 $X(t)$ 具有如下性质：

(1) 独立增量性：在互不相交的时间段

$$(t_{j-1},t_j],\ j=1,2,\cdots,n$$

内，质点的位移

$$X(t_j)-X(t_{j-1}),\ j=1,2,\cdots,n$$

是相互独立的；

(2) 平稳增量性：对于长度相等的时间段 $(s,t]$ 和 $(s+h,t+h]$，质点在 $(s,t]$ 内的位移 $X(t)-X(s)$ 和在 $(s+h,t+h]$ 内的位移 $X(t+h)-X(s+h)$ 有相同的分布；

(3) 对称性：质点沿纵轴方向的位移是平均对称的: $EX(t)=0$；

(4) 有限性：质点在 $(0,t]$ 内位移的方差 $\sigma^2(t)=\mathrm{Var}(X(t))$ 是 t 的连续函数.

根据上面的性质容易计算出

$$\begin{aligned}\sigma^2(s+t)&=\mathrm{Var}[(X(s+t)-X(t))+X(t)]\\&=\mathrm{Var}[(X(s+t)-X(t)]+\mathrm{Var}[X(t)]\\&=\sigma^2(s)+\sigma^2(t).\end{aligned}$$

由 (d) 我们知存在常数 σ^2，使得 $\sigma^2(t)=\sigma^2 t$.

对于任意 $t>0$，标准化后的位移 $Z(t)=X(t)/\sqrt{\sigma^2 t}$ 有数学期望 0 和方差 1. 对于 $t>0$，假定 $Z(t)$ 的分布与 t 无关，我们证明 $Z(t)$ 服从标准正态分布.

实际上，对于固定的 $t>0$，将 $(0,t]$ 进行 n 等分，得到等分点 $t_j=jt/n$，$j=0,1,\cdots,n$. 第 j 个时间段 $(t_{j-1},t_j]$ 的长度是 t/n. 用 $Y_j=X(t_j)-X(t_{j-1})$ 表示质点在第 j 个时间段内的位移，则 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 独立同分布，$EY_i=0$，$\mathrm{Var}(Y_j)=\mathrm{Var}(Y_1)=\sigma^2 t/n$. 其标准化

$$U_j=\frac{Y_j}{\sqrt{\sigma^2 t/n}}=\sqrt{n}\frac{Y_j}{\sqrt{\sigma^2 t}}$$

的分布与 t,n 无关，并且

$$Z(t)\equiv\frac{X(t)}{\sqrt{\sigma^2 t}}=\sum_{j=1}^n\frac{Y_j}{\sqrt{\sigma^2 t}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n U_j.$$

用 $\phi(s)=Ee^{isU_j}$ 表示 U_j 的特征函数，有

$$\phi'(0)=iEU_1=0,\ \phi''(0)=i^2EU_1^2=-1.$$

对 $\phi(s)$ 在 $s=0$ 进行 Taylor 展开得到

$$\phi(s)=\phi(0)+\phi'(0)s+\frac{1}{2}\phi''(0)s^2+o(s^2)=1-\frac{s^2}{2}+o(s^2).$$

于是 $Z(t)=(U_1+\cdots+U_n)/\sqrt{n}$ 有特征函数

$$\begin{aligned}
E\exp(isZ(t)) &= E\exp(i\frac{s}{\sqrt{n}}(U_1+U_2+\cdots+U_n)) \\
&= (E\exp(i\frac{s}{\sqrt{n}}U_1))^n \\
&= (\phi(s/\sqrt{n}))^n \\
&= (1-\frac{s^2}{2n}+o(\frac{s^2}{n}))^n \\
&\to \exp(-s^2/2),\ n\to\infty.
\end{aligned}$$

这就得到 $Z(t)$ 的特征函数 $E\exp(itZ(t))=e^{-s^2/2}$. 于是 $Z(t)\sim N(0,1)$，进而知 $X(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$. 对于 $t>s\geq 0$，由于 $X(t)-X(s)$ 和 $X(t-s)$ 同分布，得到 $X(t)-X(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s))$.

定义 27.1

如果随机过程 $\{X(t)\}$ 满足条件：

(1) 轨迹在 $[0,\infty)$ 中连续的概率是 1，且 $X(0)=0$ a.s.;

(2) $\{X(t)\}$ 是独立增量过程；

(3) 对于任何 $t>s\geq 0$，$X(t)-X(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s))$，

则称 $\{x(t)\}$ 是**布朗运动**. 特别地，当 $\sigma^2=1$ 时，称 $\{X(t)\}$ 是**标准布朗运动**.

27.2 二维布朗运动

现在回到最初的平面直角坐标系，$\boldsymbol{B}(t)=(X(t),Y(t)$ 是 t 时质点的坐标时，已经证明 $\{X(t)\}$ 是布朗运动，同理知道 $\{Y(t)\}$ 也是布朗运动，并且 $Y(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$. 将坐标系绕原点旋转 θ 角，t 时质点在新坐标系中的纵坐标为

$$W(t)=X(t)\cos\theta+Y(t)\sin\theta,\ t\geq 0.$$

$\{W(t)\}$ 也是布朗运动，与 $\{X(t)\}$ 有相同的统计性质，所以

$$\sigma^2 t=EW^2(t)=\sigma^2 t+\sin 2\theta E[X(t)Y(t)].$$

因为上式对任何 θ 成立，所以 $E[X(t)Y(t)]=0$. 于是 $\boldsymbol{B}(t)$ 服从二元正态分布，并且 $X(t),Y(t)$ 独立. 不难理解作为向量，$\boldsymbol{B}(t)=(X(t),Y(t))$ 具有独立增量和平稳增量性，这样的 $\{\boldsymbol{B}(t)|t\geq 0\}$ 被称为二维布朗运动.

定义 27.2

设二维随机过程 $\boldsymbol{B}(t)=(X(t),Y(t))$ $(t\geq 0)$ 的轨迹连续的概率为 1，且具有独立增量和平稳增量性. 如果对任何 $t\geq 0$，$X(t)$，$Y(t)$ 相互独立，都服从正态分布 $N(0,\sigma^2 t)$，则称 $\{\boldsymbol{B}(t);t\geq 0\}$ 是**二维布朗运动**.

27.3 布朗运动的简单性质

定义 27.3

如果对于任何 $n \geq 1$，$t_1, t_2, \cdots, t_n$，

$$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$$

服从 n 维正态分布，则称随机过程 $\{X(t)\}$ 为**正态过程**.

定理 27.4

如果正态过程 $\{X_t\} = \{X(t)|t \geq 0\}$ 的轨迹在 $[0, \infty)$ 中连续的概率为 1，且满足 $X(0) = 0$，则 $\{X_t\}$ 是标准布朗运动的充分必要条件是

$$E[X(t)] = 0,\ E[X(t)X(s)] = s,\ t \geq s \geq 0. \tag{27.1}$$

证明. 当 $\{X(t)\}$ 是标准布朗运动时，按定义有 $E[X(t)] = 0$，并且由独立增量性知道 $X(t) - X(s)$ 与 $X(s)$ 独立，所以有

$$E[X(t)X(s)] = E[X(t) - X(s)]E[X(s)] + E[(X(s))^2] = 0 + s.$$

如果 (27.1) 成立，对于 $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$，有

$$\begin{aligned} E[(X(t_2) - X(t_1))(X(t_4) - X(t_3))] &= E[X(t_2)X(t_4) - X(t_2)X(t_3) - X(t_1)X(t_4) + X(t_1)X(t_3)] \\ &= t_2 - t_2 + t_1 - t_1 = 0. \end{aligned}$$

这说明 $(X(t_2) - X(t_1))$ 与 $(X(t_4) - X(t_3))$ 独立. 由正态分布的性质我们知 $\{X(t)\}$ 是独立增量过程. 再由

$$E[X(t) - X(s)]^2 = t + s - 2s = t - s,\ t \geq s \geq 0,$$

我们知 $X(t) - X(s) \sim N(0, t - s)$. 所以 $\{X(t)\}$ 是标准布朗运动. □

命题 27.5

设 $B(t)$ 是标准布朗运动，n 是正常数，则以下的随机过程都是标准布朗运动：

(1) $W(t) = -B(t),\ t \geq 0$;

(2) $W(t) = B(t + a) - B(a),\ t \geq 0$;

(3) $W(t) = B(at)/\sqrt{a},\ t \geq 0$;

(4) $W(0) = 0,\ W(t) = tB(1/t),\ t > 0$;

(5) 对于正数 T，$W(t) = B(T - t) - B(T)$ 是时间段 $[0, T]$ 中的标准布朗运动.

27.4 首中时和最大值的分布

以下总用 $\{B(t)\}$ 表示标准布朗运动. 注意有 $B(0) = 0 = 0$ a.s..

对于常数 a，用 T_a 表示质点首次到达 a 的时刻，则有

$$T_a = \inf\{t | t \geq 0, B(t) = a\}.$$

T_a 称为 a 的**首达时或首中时**. 用 M_t 表示质点在 $[0,t]$ 内到达的最大值，则

$$M_t = \sup_{0\le s\le t} B(s).$$

对于 $a\ge 0$，事件 $\{T_a\le t\}$ 和 $\{M_t\ge a\}$ 都表示质点在时间段 $[0,t]$ 内到达过 a，所以

$$\{T_a\le t\}=\{M_t\ge a\},\ a\ge 0.$$

对 $a\ge 0$，下面计算首中时 T_a 的分布函数. 因为布朗函数有对称性，所以已知 $T_a\le t$ 的条件下，事件 $B(T_a)=a$ 发生，并且 $B(t)\ge a$ 与 $B(t)<a$ 发生的可能性相同，那么有

$$P(B(t)\ge a|T_a\le t)=P(B(t)<a|T\le t).$$

另外一方面，有 $\{B(t)\ge a\}\subset\{M_t\ge a\}=\{T_a\le t\}$，所以由上式得到

$$\begin{aligned}P(B(t)\ge a)&=P(B(t)\ge a,T_a\le t)\\&=P(B(t)\ge a|T_a\le t)P(T_a\le t)\\&=\frac{1}{2}[P(B(t)\ge a|T_a\le t)+P(B(t)<a|T_a\le t)](T_a\le t)\\&=\frac{1}{2}P(T_n\le t).\end{aligned}$$

于是得到

$$P(T_a\le t)=2P(B(t)\ge a),\quad a\ge 0.$$

因为 $B(t)\sim N(0,t)$，所以用 $B(t)/\sqrt{t}\sim N(0,1)$ 得到

$$P(B(t)\ge a)=P(\frac{B(t)}{\sqrt{t}}\ge\frac{a}{\sqrt{t}})=1-\Phi(a/\sqrt{t})$$

这里 $\Phi(x)$ 是 $N(0,1)$ 的分布函数. 于是我们有 $M_t=\sup_{0\le s\le t}B(s)$ 的生存函数

$$P(M_t\ge a)=P(T_a\le t)=2[1-\Phi(a/\sqrt{t})],a\ge 0.$$

有布朗运动的对称性我们知 T_{-a} 和 T_a 同分布，所以对任何常数 a，

$$P(T_a\le t)=P(T_{|a|}\le t)=2[1-\Phi(a/\sqrt{t})].$$

命题 27.6

对于标准布朗运动 $\{B(t)\}$ 和 $a\ne 0$，

(1) 质点最终到达 a 的概率为 1；

(2) 质点到达 a 平均需要的时间是 $E[T_n]=\infty$.

证明. 注意到

$$P(T_a\le t)=P(T_{|a|}\le t)=2[1-\Phi(a/\sqrt{t})],$$

令 $t\to\infty$ 我们有

$$P(T_n<\infty)=\lim_{t\to\infty}P(T_n\le t)=2[1-\Phi(0)]=1.$$

这说明在有限的时间内质点以概率 1 到达 a.

因为 $\lim_{t\to\infty}P(T_a>t)\to 0$，取 $s=|a|/\sqrt{t}$，利用洛必达法则我们有

$$C_0=\lim_{t\to\infty}\frac{P(T_a>t)}{|a|/\sqrt{t}}=\lim_{s\to 0}\frac{1-2[1-\Phi(a/\sqrt{t})]}{s}=2\Phi'(0)>0.$$

这说明有正常数 c 使得当 $t>c$ 时，$P(T_a>t)\ge\Phi'(0)|a|/\sqrt{t}$. 于是

$$E[T_a]=\int_0^\infty P(T_a>t)dt\ge\Phi'(0)|a|\int_c^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}}=\infty.$$

□

27.5 Arcsin 律

用 $N(a, a+b]$ 表示质点在时间段 $(a, a+b]$ 内访问 0 的次数.

注意 T_{-x} 和 T_x 同分布，就得到

$$P(N(a, a+b] \geq 1 | B(a) = x) = P(T_x \leq b) = 2P(B(b) \geq |x|).$$

用全概率公式和 $B(a) \sim N(0, a)$ 得到

$$\begin{aligned}
P(N(a, a+b] \geq 1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} P(N(a, a+b] \geq 1 | B(a) = x) e^{-x^2/2a} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} 2P(B(b) \geq |x|) e^{-x^2/2a} dx \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{ab}} \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} e^{-y^2/2b} dy e^{-x^2/2a} dx \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{ab}} \int_{y \geq x \geq 0} \exp(-\frac{y^2}{2b} - \frac{x^2}{2a}) dx dy.
\end{aligned}$$

为计算上述积分，取变换 $x = \sqrt{2a} r \cos\theta$，$y = \sqrt{2b} r \sin\theta$. 雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = 2r\sqrt{ab}.$$

因为

$$\begin{aligned}
y \geq x \geq 0 &\Leftrightarrow b\sin^2\theta \geq a(1 - \sin^2\theta) \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\
&\Leftrightarrow sin^2\theta \geq \frac{a}{a+b},\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\
&\Leftrightarrow \theta_0 := \arcsin\sqrt{\frac{a}{a+b}} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
P(N(a, a+b] \geq 1) \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r dr \int_{\theta_0}^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{2}{\pi}(\pi/2 - \theta_0) \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\frac{a}{a+b}}
\end{aligned}$$

于是对于 $t > 0$，$x \in (0, 1)$，我们有

$$P(N(tx, t] = 0) = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{x}.$$

上式称为布朗运动的 **Arcsin** 律.

定理 27.7

对于标准布朗运动 $\{B(t)\}$，用 T_a 表示质点首次到达 a 的时刻，用 M_t 表示质点在 $[0, t]$ 内到达的最大值，用 $N(a, b]$ 表示质点在时间段 $(a, b]$ 内访问 0 的次数，则有

(1) $P(T_a \leq t) = P(T_{|a|} \leq t) = 2P(B(t) \geq |a|)$；

(2) 对 $a \geq 0$，$P(M_t \geq a) = P(T_a \leq t)$；

(3) 对 $a \neq 0$，$E[T_a] = \infty$；

(4) 对 $b > a > 0$，$P(N(a,b] = 0) = (2/\pi)\arcsin\sqrt{a/b}$.

第 28 讲　布朗桥与经验过程，布朗运动的轨迹，随机游动与布朗运动

28.1　布朗桥

定义 28.1

设 $\{B(t)\}$ 是标准布朗运动，定义 **布朗桥**

$$X(t) = B(t) - tB(1),\ t \in [0,1].$$

明显地，布朗桥是时间段 $[0,1]$ 内的正态过程，利用正态分布的特性容易计算出布朗桥的数学期望和协方差如下：

$$E[X(t)] = 0,\ E[X(s)X(t)] = s(1-t),\ 0 \le s \le t \le 1.$$

28.2　经验过程

现在设 U 在 $[0,1]$ 上的均匀分布，$U_1, U_2, \cdots, U_n$ 是来自总体 U 的随机变量. 称分布函数 $F(t) = P(U \le t)$ 的估计量

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I[U_j \le t],\ t \in [0,1]$$

为**经验分布函数**，这里 $I[U_k \le t]$ 是事件 $\{U_k \le t\}$ 的示性函数. 因为 $F(t) = t$，所以 $F_n(t) - t$ 是估计误差. 定义

$$D_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)),\ t \in [0,1].$$

称 $D_n(t)$ 是**经验过程**.

命题 28.2

对于 $0 \le s < t \le 1$，有

(1) $E[D_n(t)] = 0$，$E[D_n(s)D_n(t)] = s(1-t)$；

(2) 对于充分大的 n，$D_n(t) \sim N(0, t(1-t))$ 近似成立.

证明. 容易计算 $E[I[U_k \le t]] = P(U_k \le t) = t$，故 $E[D_n(t)] = 0$. 利用

$$I[U_k \le s]I[U_k \le t] = I[U_k \le s],\ s < t$$

可以计算出

$$E[(I[U_k \le s] - s)(I[U_k \le t] - t)] = s - st - st + st = s(1-t).$$

再用 $I[U_k \le t]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的相互独立性得到

$$\begin{aligned} E[D_n(s)D_n(t)] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[(I[U_k \le s] - s)(I[U_k \le t] - t)] \\ &= s(1-t). \end{aligned}$$

所以 (1) 成立. 结论 (2) 恰好是中心极限定理. □

28.3 轨迹的不可微

定理 28.3

对于标准布朗运动 $\{B(t)\}$，有

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|B(h)|}{h}=\infty \ a.s..$$

证明. 定义 $Y_h=\sup_{0<s\leq h}\frac{|B(s)|}{s}$，则有

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|B(h)|}{h}=\lim_{h\downarrow 0}Y_h.$$

由 $M_h:=\sup_{0\leq s\leq h}B(s)\geq B(0)=0$ a.s. 我们有

$$Y_h=\sup_{0<s\leq h}\frac{|B(s)|}{s}\geq\frac{1}{h}\sup_{0<s\leq h}|B(s)|\geq\frac{M_h}{h}\ a.s..$$

用 $\Phi(x)$ 表示 $Z=B(h)/\sqrt{h}\sim N(0,1)$ 的分布函数，我们有

$$\begin{aligned}P(Y_h>m)&\geq P(M_h/h>m)\\&=P(M_h>mh)=2P(B(h)>mh)\\&=2P(Z>m\sqrt{h})=2[1-\Phi(m\sqrt{h})]\\&\to 2[1-\Phi(0)]=1,\ 当\ h\to 0\ 时.\end{aligned}$$

对于任何充分大的正数 m，当 $h\downarrow 0$ 时，Y_h 单调减少，事件 $A_h=\{Y_h>m\}$ 也单调减小. 用概率的连续性我们有

$$P(\limsup_{h\to\downarrow 0}Y_h>m)=P(\bigcap_{0<s\leq h}A_s)=\lim_{h\downarrow 0}P(A_h)=1.$$

由 m 的任意性我们有 $\lim_{h\downarrow 0}Y_h=\infty$ a.s.. □

因为对 $t\geq 0$，$M(t)=B(t+x)-B(x)$ 也是标准布朗运动，所以由上定理我们有

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|B(h+x)-B(x)|}{h}=\infty \ a.s..$$

上式说明在任一点 $x\geq 0$，几乎所有的轨迹都不存在导数 $B'(x)$.

28.4 轨迹的无限长

对于任意 n，将 $[0,t]$ 进行 2^n 等分，得到等分点

$$a_{n,j}=\frac{jt}{2^n},\ j=0,1,\cdots,2^n.$$

定理 28.4

对于标准布朗运动，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2^n}|B(a_{n,j})-B(a_{n,j-1})|=\infty \ a.s..$$

命题 28.5

设 $Z \sim N(0,\sigma^2)$，$\{X_n\}$ 是随机序列，有

(1) $E[Z^2]=\sigma^2$，$EZ^4=3\sigma^4$，$E[(Z^2-\sigma^2)^2]=2\sigma^4$；

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n|\geq 1/n)<\infty$ 时，$X_n\to 0$ a.s.；

(3) 当 $n\to\infty$ 时，$\sum_{j=1}^{2^n}|B(a_j)-B(a_{j-1})|^2\to t$ a.s.；

(4) 当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\max_{1\leq j\leq 2^n}|B(a_j)-B(a_{j-1})|\to 0$ a.s..

证明. 简单的计算可以得到 (1). 由 Borel-Cantelli 引理我们知道 (2) 中条件成立时，概率 1 地只有有限个 $|X_k|\geq 1/k$，所以当 n 充分大后 $|X_n|\leq 1/n$，于是结论 (2) 成立. 下面证明 (3). 对于独立同分布的 $Z_j=B(a_j)-B(a_{j-1})\sim N(0,t/2^n)$，定义

$$X_n=\sum_{j=1}^{2^n}|B(a_j)-B(a_{j-1})|^2-t=\sum_{j=1}^{2^n}(Z_j^2-t/2^n).$$

利用 Z_j 的独立性，马尔可夫不等式和 (1) 我们有

$$\begin{aligned}P(|X_n|\geq 1/n)&\leq n^2E[|X_n|^2]=n^2 2^n E[(Z_j^2-t/2^n)^2]\\&=2n^2 2^n (t/2^n)^2=2t^2n^2 2^{-n}.\end{aligned}$$

于是由结论 (2) 我们有 $X_n\to 0$ a.s.，于是结论 (3) 成立. 由

$$E[Y_n^4]=E[\max_{1\leq j\leq 2^n}|Z_j|^4]\leq\sum_{j=1}^{2^n}E[Z_j^4]$$

和马尔可夫不等式得到

$$\begin{aligned}P(Y_n\geq\frac{1}{n})&\leq n^4E[Y_n^4]\leq n^4 2^n E[Z_1^4]\\&=3n^4 2^n (t/2^n)^2=3t^2n^4 2^{-n}.\end{aligned}$$

再由 (2) 得到 (4). □

定理 28.4 的证明. 由 Y_n 的定义知道

$$\sum_{j=1}^{2^n}|B(a_j)-B(a_{j-1})|^2\leq Y_n\sum_{j=1}^{2^n}|B(a_j)-B(a_{j-1})|.$$

于是有

$$\sum_{j=1}^{2^n}|B(a_j)-B(a_{j-1})|\geq\frac{1}{Y_n}\sum_{j=1}^{2^n}|B(a_j)-B(a_{j-1})|^2.$$

当 $n\to\infty$ 时，上式右端分子趋于 $t>0$ a.s.，分母 $Y_n\to 0$ a.s.，所以整体趋于 ∞ a.s.. □

28.5 重对数律

对于标准布朗运动的轨迹，还可以证明下面的 **重对数律**结论：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\ a.s.,\quad \liminf_{t\to\infty}\frac{B(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1\ a.s.,$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t^{-1}}}=1\ a.s.,\quad \liminf_{t\to\infty}\frac{B(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t^{-1}}}=-1\ a.s..$$

由布朗运动的重对数律可以诱导出随机变量的重对数律.

设 $E[X]=0$，$\mathrm{Var}(X)=1$，$X_1,X_2,\cdots$ 是来自总体 X 的随机变量，则有重对数律：

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=1\ a.s.,\quad \liminf_{t\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=-1\ a.s.,$$

其中 $S_n=\sum_{j=1}^n X_j$ 是样本部分和.

28.6 随机游动与布朗运动

我们回顾一下简单对称随机游动的概念. 定义

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{当第 } i \text{ 次向上移动一步},\\ -1, & \text{当第 } i \text{ 次向下移动一步},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,$$

则 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布的随机变量，$EX_1=0$，$\mathrm{Var}(X_1)=1$. 在时刻 n，质点所处的高度是 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，坐标是 (n,S_n). 这里和以后规定 $S_0=0$.

下面考虑更一般的随机游动. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots$ 独立同分布，$E[X_i]=0$，$\sigma^2=\mathrm{Var}(X_i)<\infty$. 质点从原点出发第 i 步沿纵轴移动 X_i 单位，在时刻 n，质点所处的高度是 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，坐标是 (n,S_n).

对于 $0,1,\cdots,n$，把质点的位置坐标 (k,S_k) 用线段连接起来，得到折线函数

$$S_n(t)=S_k+(t-k)X_{k+1},\ \text{当 } t\in[k,k+1],\ 0\le k\le n-1.$$

由于 $S_n(t)$ 在 $[k,k+1]$ 中是线性函数且满足 $S_n(k)=S_k$，所以 $S_n(t)$ 是质点前 n 步的运行轨迹.

当 n 增大时折线越来越长，看不到有意思的东西. 让我们把折线 $S_n(t)$ 进行压缩. 首先把折线 S_n 沿横坐标向左压缩 n 倍，得到折线

$$C_n(t)=S_k+(nt-k)X_{k+1},\ t\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}],\ 0\le k\le n-1.$$

再沿纵坐标向 t 轴压缩 $(\sqrt{n\sigma^2})^{-1}$ 倍，得到折线

$$\xi_n(t)=\frac{S_k+(nt-k)X_{k+1}}{\sqrt{n\sigma^2}},\ \text{当 } t\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}],\ 0\le k\le n-1.$$

对于质点的每次运行，可以看出 $\xi_n(t)$ 是 $[0,1]$ 中的连续折线函数.

对于任意的 $t\in[k/n,(k+1)/n]$，容易计算 $|t-k/n|\le\frac{1}{n}$, $(nt-k)^2\le 1$，所以有

$$E[\xi_n(t)]=\frac{E[S_k]+(nt-k)E[X_{k+1}]}{\sqrt{n\sigma^2}}=0,$$

$$E[\xi_n^2(t)]=\frac{k\sigma^2+(nt-k)^2\sigma^2}{n\sigma^2}=t+O(n^{-1}),\ \text{当 } n\to\infty \text{ 时}.$$

对于 $0\le s\le t\le 1$，也可以计算出 $\xi_n(t)$ 的协方差函数

$$\begin{aligned}E[\xi_n(s)\xi_n(t)]&=E[\xi_n^2(s)]+E[\xi_n(s)(\xi_n(t)-\xi_n(s))]\\&=s+O(n^{-1}),\ 0\le s<t\le 1.\end{aligned}$$

于是，对于充分大的 n，作为随机过程的折线 $\{\xi_n(t)\}$ 和标准布朗运动 $\{B(t)|0\le t\le 1\}$ 有相近的协方差函数.

第 29 讲　随机积分

29.1　鞅：定义与例子

我们称满足 $E(|M_i|) < \infty$ 的随机变量序列 $M_0, M_1, M_2, \cdots$ 关于递增的 σ 代数序列 $\{\mathcal{F}_n\}$ 构成一个鞅，如果 M_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测，且对任意 $m < n$，有

$$E(M_n|\mathcal{F}_m) = M_m, \tag{29.1}$$

或等价地，

$$E(M_n - M_m|\mathcal{F}_m) = 0.$$

实际上要验证 (29.1) 我们只需证明对于任意 n，有

$$E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n.$$

设 $X_0, X_1, X_2, \cdots$ 是随机变量序列. 如果 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$, 且 $M_0, M_1, \cdots$ $\{\mathcal{F}_n\}$ 构成一个鞅, 则称 $M_0, M_1, \cdots$ $X_0, X_1, X_2, \cdots$ 构成一个鞅

例 29.1

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为期望 μ 的独立随机变量. 设 $S_0 = 0$ 且对任意 $n > 0$，记 S_n 为部分和

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

则 $M_n = S_n - n\mu$ 为相对于 $\mathcal{F}_n = \{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ 的鞅. 我们可以如下方式验证：

$$\begin{aligned} E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(S_{n+1} - (n+1)\mu|\mathcal{F}_n) &= E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) - (n+1)\mu \\ &= (S_n + \mu) - (n+1)\mu = M_n. \end{aligned}$$

特别地，若 $\mu = 0$，则 M_n 关于 $\mathcal{F}_n = \{X_0, X_1, \ldots, X_n\}$ 构成了一个鞅.

例 29.2

下面是 “鞅赌博策略” 的一种描述，即如何在一场公平的赌博中取胜的方法. 设 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 是相互独立的随机变量且满足

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}.$$

我们可以将随机变量 X_i 看成是投掷一个硬币得到的结果：若出现正面则赢得 1 元，出现反面则输掉 1 元. 此游戏要获胜的一种方法是不断将赌本翻倍直到我们最终赢得比赛. 在取胜的那局比赛中停止游戏. 设 W_n 为利用此策略掷 n 次硬币获得的收益（或者损失），$W_0 = 0$. 由游戏规则我们知

$$P\{W_{n+1} = 1|W_n = 1\} = 1.$$

$$P\{W_{n+1} = 1|W_n = -(2^n - 1)\} = \frac{1}{2}.$$

$$P\{W_{n+1} = -(2^{n+1} - 1)|W_n = -(2^n - 1)\} = \frac{1}{2}.$$

从而容易证明

$$E(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = W_n,$$

因此 W_n 是关于 $\mathcal{F}_n$ 的鞅.

例 29.3

我们将前例一般化. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 如例 2 所设. 假设第 n 次投掷时我们的赌金为 B_n. 要确定赌金的数量，我们只需要知道前 $n-1$ 次投掷的结果，而不需要知道之后的投掷结果. 换而言之，B_n 是关于 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测的随机变量 (我们假定 B_1 是一个常数). 给定 $W_0 = 0$，n 次投掷后的收益 W_n 为

$$W_n = \sum_{j=1}^{n} B_j X_j.$$

我们允许 B_n 是负的；也即对应的是硬币将会出现背面. 假设 $E(|B_n|) < \infty$，则 W_n 是关于 $\mathcal{F}_n$ 的鞅. 要证明这一点，首先我们对任意 n，$E(|B_n|) < \infty$ 这一事实可以看出 $E(|W_n|) < \infty$. 显然 W_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的. 于是，

$$\begin{aligned}
E(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(\sum_{j=1}^{n+1} B_j X_j|\mathcal{F}_n) \\
&= E(\sum_{j=1}^{n} B_j X_j|\mathcal{F}_n) + E(B_{n+1}X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} B_j X_j + B_{n+1}E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= W_n + B_{n+1}E(X_{n+1}) \\
&= W_n.
\end{aligned}$$

例 29.4

考虑一个装有红绿两种颜色的球的坛子. 假设开始的时候在坛中两种颜色的球各有一个. 每次从坛中随机摸出一个球，如果是红球，则将其放回并且额外再往坛中放入另外一个红球，对于绿球也同样操作. 设 X_n 为 n 次摸球之后坛中的红球数，则 $X_0 = 1$ 且 X_n 是一个 (时齐的) 马尔可夫链，其转移概率为

$$P\{X_{n+1} = k+1|X_n = k\} = \frac{k}{n+2},$$

$$P\{X_{n+1} = k|X_n = k\} = \frac{n+2-k}{n+2}.$$

令 $M_n = \frac{X_n}{(n+2)}$ 为 n 次摸球之后坛中红球所占的比例，则 M_n 是一个鞅. 要证明这一点，注意到

$$E(X_{n+1}|X_n = k) = (k+1)\frac{k}{n+2} + k\frac{n+2-k}{n+2} = k + \frac{k}{n+2},$$

从而我们知

$$E(X_{n+1}|X_n) = X_n + \frac{X_n}{n+2}.$$

由于 X_n 是一个马尔可夫链，$\mathcal{F}_n$ 中决定 X_{n+1} 的所有相关信息都包含在 X_n 里，从而，

$$\begin{aligned}
E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E((n+3)^{-1}X_{n+1}|X_n) \\
&= \frac{1}{n+3}[X_n + \frac{X_n}{n+2}] \\
&= \frac{X_n}{n+2} = M_n.
\end{aligned}$$

定义 29.5

满足 $E(|M_n|) < \infty$ 的过程 M_n 称为关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的下鞅 (上鞅)，若对任意 $m < n$，$E(M_n|\mathcal{F}_m) \geq (\leq) M_m$.

29.2 关于随机游动的积分

令 $X_1, X_2, \cdots$ 使相互独立的随机变量，$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$，令 S_n 表示与此相应的简单随机游动：

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

我们可以把 X_n 看作一个游戏在时刻 n 的结果，可以考虑此游戏的可行性赌博策略.

记 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$. 设 B_n 为时间 n 时的赌注. B_n 可取正也可取负，负值表示对 $X_n = -1$ 下赌注. 我们假设我们第 n 次的赌注只与前 $n-1$ 次结果有关，即 $\mathcal{F}_{n-1}$. 那么在时间 n 时的收益 Z_n 可以写为

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} B_i X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i [S_i - S_{i-1}] = \sum_{i=1}^{n} B_i \Delta S_i,$$

其中我们记 $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$. 我们称 Z_n 为 B_n 关于 S_n 的积分.

Z_n 满足两个重要的性质，第一个是我们前面讲鞅的时候提到的，Z_n 是关于 $\mathcal{F}_n$ 的一个鞅，也就是说如果 $m < n$，则

$$E(Z_n|\mathcal{F}_m) = Z_m.$$

特别地，$E(Z_n) = 0$.

第二个性质是关于 Z_n 的二阶矩. 设 B_n 有有限的二阶矩，$E(B_n^2) < \infty$. 则

$$\mathrm{Var}(Z_n) = E(Z_n^2) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i^2).$$

为证明这一条，我们注意到

$$Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} B_i^2 X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} B_i B_j X_i X_j.$$

注意到 $X_i^2 = 1$，我们有

$$E(\sum_{i=1}^{n} B_i^2 X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} E(B_i^2).$$

设 $i < j$. 则 B_i, X_i, B_j 都是关于 $\mathcal{F}_{j-1}$ 可测的，而 X_j 是与 $\mathcal{F}_{j-1}$ 独立的. 于是我们有

$$E(B_i B_j X_i X_j|\mathcal{F}_{j-1}) = B_i B_j X_i E(X_j|\mathcal{F}_{j-1}) = B_i B_j X_i E(X_j) = 0,$$

从而

$$E(B_i B_j X_i X_j) = E[E(B_i B_j X_i X_j|\mathcal{F}_{j-1}] = 0.$$

于是

$$EZ_n^2 = \sum_{i=1}^{n} E(B_i^2).$$

29.3 关于布朗运动的积分

对于一个简单策略，我们可以定义随机积分如下：当 $t_j \leq t < t_{j+1}$ 时，

$$Z_t = \int_0^t Y_s dW_s = \sum_{i=1}^{j} Y_{t_{i-1}}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}] + Y_{t_j}[W_t - W_{t_j}].$$

命题 29.6

如果 X_s 和 Y_s 为两个简单策略，a 和 b 为实数，则 aX_s+bY_s 是一个简单策略且

$$\int_0^t (aX_s+bY_s)dW_s = a\int_0^t X_s dW_s + b\int_0^t Y_s dW_s.$$

命题 29.7

Z_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 是一个鞅.

命题 29.8

$$E(Z_t^2)=\int_0^t E(Y_s^2)ds.$$

证明. 设 $t_j \le t < t_{j+1}$. 注意到 $E(Y_s^2)$ 为关于 s 的阶梯函数，所以

$$\int_0^t E(Y_s^2)ds = \sum_{i=0}^{j-1} E(Y_{t_i}^2)(t_{i+1}-t_i) + E(Y_{t_j}^2)(t-t_j).$$

我们展开 Z_t^2，可得：

$$Z_t^2 = \sum_{i=1}^{j} Y_{t_{i-1}}^2 [W_{t_i} - W_{t_{i-1}}]^2 + Y_{t_j}^2 [W_t - W_{t_j}]^2 + \text{交叉项}.$$

这里交叉项为下列形式的式子之和：

$$Y_{i-1}Y_{k-1}[W_{t_i}-W_{t_{i-1}}][W_{t_k}-W_{t_{k-1}}],\ i<k,$$

或者

$$Y_{i-1}Y_j[W_{t_i}-W_{t_{i-1}}][W_t - W_j].$$

不难计算上面两个式子的期望均为 0. 因此，

$$E(Z_t^2)=\sum_{i=1}^{j} E(Y_{i-1}^2[W_{t_i}-W_{t_{i-1}}]^2) + E(Y_j^2[W_t-W_{t_j}]^2).$$

注意到

$$\begin{aligned}
E[Y_{i-1}^2[W_{t_i}-W_{t_{i-1}}]^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] &= Y_{i-1}^2 E[(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] \\
&= Y_{i-1}^2 E[(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2] \\
&= Y_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

因此，

$$E(Y_j^2[W_t-W_{t_j}]^2) = E(E[Y_{i-1}^2[W_{t_i}-W_{t_{i-1}}]^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]) = E(Y_{i-1}^2)(t_i-t_{i-1}).$$

同样，

$$E[Y_j^2[W_t-W_{t_j}]^2] = E(Y_j^2)(t-t_j).$$

从而得证. □