第 15 讲 第二部分总结：更新过程

课程第二部分总结

例子

1. 更新过程　重点: 基本概念的理解.
2. 更新定理与更新方程　重点: 停时, 更新定理与更新方程的应用. 难点: 停时的理解.
3. 年龄与剩余寿命
4. 开关过程与更新过程的推广　重点: 利用开关系统, 有偿更新过程建模解决实际问题.

例 2.1

设更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔有密度函数 $f(t) > 0$, 是否能找到来自总体 T 的随机变量 $\{T_i\}$, 使得将 $\{N(t)\}$ 的第 i 个更新间隔扩大为 T_i 倍后, 得到强度为 λ 的泊松过程.

证明.

令 $F_X(t)$ 为 X 的累积分布函数. 构造 $T_i = \dfrac{-\ln(1-F_X(X_i))}{\lambda X_i}$. 此时 $Y_i = T_i X_i = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-F_X(X_i))$. 注意到 $V = F_X(X_i) \sim \mathsf{U}(0,1)$, 所以对于 $y>0$,

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y_i \le y) \\
&= P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(V) \le y\right) \\
&= P(\ln(V) \ge -\lambda y) \\
&= P(V \ge e^{-\lambda y}) \\
&= 1 - e^{-\lambda y}.
\end{aligned}
$$

于是 Y_i 服从参数为 λ 的指数分布. □

例 2.2

在对更新过程 $\{N(t)\}$ 进行记录时，每个事件都以概率 p 被漏记. 问记录下来的计数过程是否为更新过程？如果是，求更新间隔的分布和原更新间隔分布之间的关系.

证明.

由于原过程是更新过程，每个事件被漏记所对应的事件相互独立，也与更新过程独立，同时由下面计算知每次记录的时间间隔服从相同的分布，所以新过程也为更新过程。以 X 表示新的更新过程的时间间隔，则以 N 表示两次更新中漏记的事件数，由全概率公式我们有：

$$
\begin{aligned}
P(X \le t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X \le t | N = n) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t)(1-p)p^n \\
&= (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) p^{n-1}.
\end{aligned}
$$

□

例 2.3

设 $T_1, T_2, \cdots$ 独立同分布，都服从二项分布 $B(n,p)$，且与更新过程 $\{N(t)\}$ 独立。将 $\{N(t)\}$ 的第 i 个更新间隔扩大 T_i 倍后，是否得到新的更新过程？如果是，计算更新间隔的密度函数。

证明.

新的计数过程的时间间隔为 $Y_i = X_i T_i$. 注意到 $\{T_i\}$ 相互独立，$\{X_i\}$ 也相互独立，且 $\{T_i\}$ 与 $\{X_i\}$ 独立，故 $\{X_i T_i\}$ 也相互独立。下面我们证明 Y_i 具有相同的分布，从而得到的过程为更新过程.

我们有

$$
\begin{aligned}
P(T_i X_i \le x) &= \sum_{k=0}^{n} P(T_i X_i \le x | T_i = k) P(T_i = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(k X_i \le x) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + q^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} F(x/k) + q^n.
\end{aligned}
$$

从而我们知得到的过程为更新过程，且更新间隔的分布函数如上. □

例 2.4

设更新过程 $(N(t):t\geq 0)$ 的更新间隔时间序列 $\{X_n\}$ 取正整数值. 记 $A_n=\{$在时刻 n 发生更新$\}$. 证明：如果极限 $a:=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$ 存在，则有 $a=1/E(X_1)$.

证明.

注意到时刻 n 为止的更新次数为 $N(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$. 因此，

$$m(n) = E[N(n)] = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

由于极限 $a := \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ 存在，我们知 $m(n)/a \to a$. 由基本更新定理 $m(n)/n \to 1/E(\xi_1)$，所以 $a = 1/E(\xi_1)$. $\square$

例 2.5

设 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个更新过程，已知其更新函数 $m(t) = E[N(t)]$.
求 $g(t) := E[N(t)^2]$.

解.

令 S_1 是第一次更新的时间，则

$$g(t) = E[E[N(t)^2|S_1]] = \int_0^t E[N(t)^2|S_1 = x]dF(x).$$

注意到

$$\begin{aligned} E[N(t)^2|S_1 = x] &= E[(N(x,t] + N(x))^2|S_1 = x) \\ &= E[(N(x,t] + 1)^2|S_1 = x] \\ &= E[(N(t-x) + 1)^2], \end{aligned}$$

我们有

$$g(t) = F(t) + 2\int_0^t m(t-x)dF(x) + \int_0^t g(t-x)dF(x).$$

证明.

又注意到

$$\int_0^t m(t-x)dF(x) = m * F(t) = m(t) - F(t),$$

于是我们知 g 是如下更新方程的解：

$$g(t) = 2m(t) - F(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x).$$

注意到 $2m(t) - F(t)$ 是局部有界的，由课本定理 3.2 我们有

$$\begin{aligned} g(t) &= 2m(t) - F(t) + [2m - F] * m(t) \\ &= m(t) + 2m * m(t). \end{aligned}$$

□

例 2.6

设 X 和 X_1 是非负随机变量, $\{X_j | j \geq 2\}$ 相互独立并且与 X 同分布, 且与 X_1 独立. 称以 $\{X_j\}$ 为更新间隔的更新过程 $\{N_D(t)\}$ 为延迟更新过程. 对延迟更新过程计算 $m_D(t) = EN_D(t)$, 并推导更新方程

$$m_D(t) = G(t) + \int_0^t m_D(t-s)dF(s),$$

其中 $G(x)$, $F(x)$ 分别是 X_1, X 的分布函数.

证明.

设 $G(x)=P(X_1\le x)$，$F(x)=P(X\le x)$. 用 $m_D(t)=E[N_D(t)]$ 表示延迟更新过程的更新函数，用 F_0 表示常数 0 的分布函数，则有

$$
\begin{aligned}
m_D(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} E[I[S_j\le t]] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1+(S_j-X_1)\le t) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} G*F_{j-1}(t) \ \text{(独立随机变量的和的分布函数等于它们各自分布函数的卷积)} \\
&= G(t)+\sum_{j=1}^{\infty} G*F_j(t) \\
&= G(t)+\sum_{j=1}^{\infty} G*(F_{j-1}*F)(t) \\
&= G(t)+\sum_{j=1}^{\infty} (G*F_{j-1})*F(t) \ \text{(卷积服从结合率)} \\
&= G(t)+(\sum_{j=1}^{\infty} G*F_{j-1})*F(t) \\
&= G(t)+\int_0^t m_D(t-s)dF(s).
\end{aligned}
$$

□

例 2.7

某保险公司对某种保险有两档收费率，分别为每单位时间 r_1 (称为一档保费) 和 r_0 (称为二档保费)．设参保人一开始缴纳一档保费. 如果他缴纳一档保费之后，在连续 s 个单位时间内没有发生理赔，那么他会将保费切换到二档保费；一旦发生理赔，参保人会维持或切换到一档保费. 设理赔的发生构成一个参数 λ 的 Poisson 过程. 假设参保人的参保时间充分的长，求他单位时间所付的平均保费.

解.
如果当参保人按收费率 r_1 付费时，我们说系统处在开状态，否则称系统处于关状态，于是我们得到一个开关系统. 记 X 是是相继理赔间的时间间隔，U 是开状态时间，则 $U=\min(X,s)$. 于是

$$E[U]=E[\min(X,s)]=\int_0^s x\lambda e^{-\lambda x}dx+se^{-\lambda s}=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s}).$$

于是我们可得参保人以收费率 r_i 付费的时间比例 $(i=1,2)$:

$$P_1=E[U]/E[X]=1-e^{-\lambda s},\ P_0=1-P_1=e^{-\lambda s}.$$

于是单位时间所付的平均保费为

$$r_0P_0+r_1P_1=r_1-(r_1-r_0)e^{-\lambda s}.$$

□

例 2.8

证明更新过程是泊松过程的充分必要条件是剩余寿命 $R(t)$ 与更新间隔 X 同分布.

证明.

由泊松过程的定义知，如果一个更新过程是泊松过程，则其剩余寿命 R(t) 与更新间隔 X 同分布. 我们已知

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t) \le y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds.$$

如果剩余寿命 $R(t)$ 与更新间隔 X 同分布，则

$$P(R(t) \le y) = F(y).$$

于是

$$\frac{1}{\mu}\int_0^y \overline{F}(s)ds = F(y).$$

由上式我们知 F 连续可导，于是对上式两边关于 y 求导，得：

$$1 - F(y) = F'(y).$$

解上面的常微分方程并注意到 $F(0) = 0$，我们有 $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$，其中 λ 是一个常数. 其为指数分布的分布函数，所以更新间隔服从指数分布，从而这个更新过程是一个泊松过程. □

例 2.9

对于更新过程的年龄 $A(t)$ 和寿命 $R(t)$, 计算

$$P(R(t) > x|A(t) = s), \ \ P(R(t) > 2x|A(t+x) = s).$$

解.

我们有

$$
\begin{aligned}
P(R(t) > x | A(t) = s, N(t) = n) &= P(S_{n+1} - t > x | t - S_n = s, S_{n+1} > t) \\
&= \frac{P(S_{n+1} - t > x, t - S_n = s, S_{n+1} > t)}{P(t - S_n = s, S_{n+1} > t)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} > x + s, S_n = t - s)}{P(X_{n+1} > s, S_n = t - s)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} > x + s)}{P(X_{n+1} > s)} = \frac{\overline{F}(x + s)}{\overline{F}(s)},
\end{aligned}
$$

解.

于是

$$
\begin{aligned}
P(R(t)>x|A(t)=s) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(R(t)>x|A(t)=s, N(t)=n)P(N(t)=n|A(t)=s) \\
&= \frac{\overline{F}(x+s)}{\overline{F}(s)} \sum_{0}^{\infty} P(N(t)=n|A(t)=s) \\
&= \frac{\overline{F}(x+s)}{\overline{F}(s)}, s \le t.
\end{aligned}
$$

解.

注意到若 $s < x$, 则 $P(R(t) > 2x|A(t+x) = s) = 0$. 当 $s \geq x$ 时, 我们知 $\{A(t+x) - s\} = \{A(t) = s - x, X_{N(t)+1} > s\}$. 所以

$$
\begin{aligned}
P(R(t) > 2x|A(t+x) = s) &= P(R > 2x|A(t) = s - x, X_{N(t)+1} > s) \\
&= \frac{P(R > 2x, A(t) = s - x, X_{N(t)+1} > s)}{P(A(t) = s - x, X_{N(t)+1} > s)} \\
&= \frac{P(R(t) > 2x, A(t) = s - x)}{P(A(t) = s - x, X_{N(t)+1} > s)} \\
&= \frac{P(R(t) > 2x, A(t) = s - x)}{P(A(t) = s - x, P(R(t) > x)} \\
&= \frac{P(R(t) > 2x|A(t) = s - x)}{P(R(t) > x|A(t) = s - x)} \\
&= \frac{\overline{F}(s+x)}{\overline{F}(s)}.
\end{aligned}
$$

□

例 2.10

乘客按照每分钟 λ 个人的泊松流到达渡口，每次到达一位乘客．有 n 个人在渡口渡船时，每分钟渡口有收益 nc 元．现在渡口每 T 分钟发一艘船．计算该渡口在单位时间内的平均收益．

证明.

设第 i 个乘客到达时间为 S_i. 称一次发船是一次更新. 记 Y 为一次更新的收益. 于是

$$Y = c\sum_{i=1}^{N(T)}(T - S_i).$$

由课本 P40 例 2.2，我们有

$$\begin{aligned}
E[Y] =& cE[\sum_{i=1}^{N(T)}(T - S_i)]\\
=& c\sum_{n=0}^{\infty}E[\sum_{i=1}^{N(T)}(T - S_i)|N(T) = n]P(N(T) = n)\\
=& c\sum_{n=0}^{\infty}E[\sum_{i=1}^{n}(T - S_i)|N(T) = n]P(N(T) = n)\\
=& c\sum_{n=0}^{\infty}E[nT - n\cdot\frac{T}{2}]P(N(T) = n)\\
=& \frac{1}{2}c\lambda T^2.
\end{aligned}$$

于是单位时间的平均收益为

$$\frac{E[Y]}{T} = \frac{1}{2}\lambda cT. \qquad \square$$

例 2.11

生产线按顺序生产某种产品，且每件产品合格的概率为 p $(0 < p < 1)$. 执行以下的抽检方案：开始时逐一检查每件产品，直到连续出现 k 件合格品，之后以概率 α $(0 < \alpha < 1)$ 检查每件产品，直到查出不合格品，此时一个循环结束. 接着重新开始逐一检查每件产品，如此循环下去. 求长时间看被检查产品所占的比例.

解.

将该问题看作一个有偿更新过程. 于是长时间看被检查产品所占的比例等于一个循环中被检查的产品数的期望除以一个循环中生产的产品数的期望.
由题意，一个循环分为两个阶段，全面检查阶段和抽查阶段. 我们分别计算两个阶段所对应的被检查的产品数的期望和生产的产品数的期望.
我们先考虑第一个阶段，此时被检查的产品数和生产的产品数相同，它们的期望也相同. 为方便叙述，不妨称在检查中连续出现的 k 件合格品为 k 件合格品串. 于是这个阶段被检查的产品数为第一次出现 k 件合格品串时被检查的产品数，记为 N_k. 下面推导 $M_k := E[N_k]$ 的递推公式. 为此在第一个 $k-1$ 件合格品出现时，对下一件产品的情况分类考虑. 令 G_k 表示 "(第一个 $k-1$ 件合格品出现时) 下一件产品合格". 如果 G_k 发生，则此前的 $k-1$ 件合格品串与该件合格品串构成一个 k 件合格品串，所以 $E[N_k - N_{k-1}|G_k] = 1$；而如果 G_k^c 发生，则此前出现的 $k-1$ 件合格品串失效，需要等待新的 k 件合格品串，于是 $E[N_k - N_{k-1}|G_k^c] = E[N_k + 1]$.

解.

由于 $P(G_k)=p$，根据全期望公式我们有

$$E[N_k-N_{k-1}]=p+(1-p)E[N_k+1],$$

即

$$M_k-M_{k-1}=p+(1-p)(1+M_k),$$

从而可得

$$pM_k=M_{k-1}+1,$$

注意到 $M_1=1/p$，我们有

$$M_k=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^k}=\frac{1/p^k-1}{1-p}.$$

解.

对于第二阶段，每件检查产品不合格的概率为 $q=1-p$，于是发现一件不合格品平均要检查的产品数为 $1/q$. 而每件产品被发现是不合格品的概率为 αq，所以发现一件不合格品平均出产的产品数为 $1/\alpha q$. 因此

$$E[\text{一个循环中被检查的产品数}] = E[N_k] + 1/q,$$

$$E[\text{一个循环中生产的产品数}] = E[N_k] + 1/\alpha q.$$

于是长时间被检查产品所占比例为

$$E[\text{一个循环被检查的产品数}]/E[\text{一个循环生产的产品数}] = \frac{\alpha}{\alpha+(1-\alpha)p^k}.$$

□