第 17 讲 状态命名与周期

定义 1.1

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态.

(1) 如果 $p_{ii} = 1$，则称 i 是吸引状态;

(2) 如果存在 $n \geq 1$ 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$，则称 i 通 j，记做 $i \to j$;

(3) 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$，则称 i, j 互通，记做 $i \leftrightarrow j$.

$i \to j$ 表示质点从 i 出发以正概率到达 j. i，j 互通表明质点从 i 到 j 后，以正概率回到 i，反之亦然.

例 1.2

对于两端是吸收壁的简单随机游动，状态 0 和 n 都是吸引状态.

命题 1.3

设 I 是马氏链 $\{x_n\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态. 则 $i \to j$ 当且仅当

$$P_i(\text{存在 } n \geq 0 \text{ 使得 } X_n = j) > 0.$$

证明.

注意到

$$p_{ij}^{(n)} \le P_i(\text{存在 } n \ge 0 \text{ 使得 } X_n = j) \le \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)},$$

可知上面两个条件等价. $\square$

命题 1.4

如果 $i \leftrightarrow j$，那么 $j \leftrightarrow i$.

命题 1.5

如果 $i \to j$ 且 $j \to k$，则 $i \to k$.

证明.
如果 $i \to j$ 且 $j \to k$，则存在 n, m 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0$，我们有

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0,$$

于是 $i \to k$. $\square$

状态的互通性
常返与非常返态
正常返与零常返状态
周期及其性质
遍历状态
状态空间的分解

对于马氏链 $\{X_n\}$，引入条件概率

$$f_{ij}^{(1)} = P(X_1 = j | X_0 = i),$$

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j; 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i), \ \ n \geq 1.$$

$f_{ij}^{(n)}$ 是质点从 i 出发的条件下，第 n 步首次到达 j 的概率，称为从 i 出发后第 n 步首达 j 的概率，简称为首达概率.

由于对不同的 n，事件

$$A_1 = \{X_1 = j\},\ A_n = \{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1\} \tag{2.1}$$

互不相容，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 发生表示质点到达过状态 j，所以

$$f_{ij}^* := P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1.$$

f_{ij}^* 是质点从 i 出发的条件下到达过 j 的概率，简称从 i 出发后到达 j 的概率.

定义 2.1

如果 $f_{ii}^{*}=1$，则称 i 是常返状态. 如果 $f_{ii}^{*}<1$，则称 i 是非常返态.

按照定义，吸引状态满足 $f_{ii}^{*}=f_{ii}^{(1)}=1$，因而是常返状态. 当 i 是常返状态时，质点从 i 出发后，在实际中必然回到 i，再从 i 出发，再回到 i，因而回到 i 无穷次. i 是非常返态表明质点从 i 出发后，以正概率不能回到 i，因而只能回到 i 有限次，然后永远离开状态 i.

定理 2.2

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

证明.

设 A_n 由 (2.1) 定义，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容. $\bigcup_{k=1}^n A_k$ 表示前 n 次转移中到达过 j，所以 $\{X_n = j\} \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$. 于是应用全概率公式，我们有：

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A_k | X_0 = i) P(X_n = j | A_k, X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 2.3

对于马氏链 $\{X_n\}$ 以及 $\{p_{ii}^{(n)}\}$，$f_{ii}^{(n)}$，有以下结果：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{(1-f_{ii}^{*})}$；

(2) i 是常返状态的充分必要条件是 $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$；

(3) 如果 i 是常返状态，$i \to j$，则 $i \leftrightarrow j$，并且 j 也是常返的.

引理 2.4

(1) 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛，则

$$\lim_{s\to 1-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k=\sum_{k=0}^{\infty} a_k=a.$$

(2) 如果 $a_k\geq 0$ 且 $\lim_{s\to 1-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k=a\leq\infty$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k=a.$$

证明.

在定理 2.2 中取 $j=i$，两边再同时乘以 ρ^n，对 $n\geq 1$ 我们有

$$\rho_{ii}^{(n)}\rho^n=\sum_{k=1}^{n}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k},\ \rho\in(0,1).$$

上式两边对 n 求和得到

$$\begin{aligned}G(\rho)&=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k}\\&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}f_{ii}^{(k)}\rho^k p_{ii}^{(n-k)}\rho^{n-k}\\&=1+(\sum_{k=1}^{\infty}f_{ii}^{(k)}\rho^k)(\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}\rho^n)\\&=1+F(\rho)G(\rho),\end{aligned}$$

证明.

其中 $F(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \rho^k$. 于是得到

$$G(\rho) = 1/[1 - F(\rho)].$$

令 $\rho \to 1-$ 就得到结论 (1).

结论 (2) 是结论 (1) 的直接推论.

下面证明结论 (3). 首先我们证明 $i \leftrightarrow j$. 因为 $i \to j$，可见自 i 出发，最终要到达 j，而且中间不经过 i 的概率应大于 0；因此，必存在 $N(>0)$，使自 i 出发，于第 N 步初次到达 j，而且中间不经过 i 的概率 $f_{i,ij}^{(N)} > 0$. 下面我们证明 $f_{ji}^* = 1$，于是 $j \to i$. 若 $f_{ji}^* < 1$，则自 i 出发，不回到 i 的概率至少为 $f_{i,ij}^{(N)}(1 - f_{ji}^*) > 0$，此与 i 为常返的假设矛盾.

证明.

再证明 j 是常返的. 设 n, m 使得 $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任意 $k \geq 1$，我们有

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)}.$$

两边对 k 求和我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty,$$

由 (2) 知道 j 是常返的. $\square$

记

$$T_i = \begin{cases} \min\{n | X_n = i; n \geq 1\}, & \text{当 } \bigcup_{i=1}^{\infty}\{X_n = i\} \text{ 发生}, \\ \infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

对于马氏链 $\{X_n\}$，T_i 是质点首次到达状态 i 时的转移次数. $T_i = n$ 表示质点第 $n(\geq 1)$ 次转移首次到达状态 i.

引入条件概率 $P_i(\cdot) = P(\cdot|X_0 = i)$，则

$$f_{ii}^{(n)} = P_i(T_i = n) = P(T_i = n|X_0 = i)$$

是把质点从 i 出发的条件下，第 n 步首次回到 i 的概率. 当 $f_{ii}^* = 1$ 时，则 $P_i(T_i < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$. 在条件 $X_0 = i$ 时，T_i 的数学期望

$$\mu_i = E[T_i|X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} nP_i(T_i = n) = \sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}^{(n)}. \tag{3.1}$$

μ_i 是质点返回状态 i 所需要的平均转移次数，称 μ_i 为状态 i 的平均回转时间或期望回转时间. 平均回转时间 μ_i 越小，表明质点返回 i 越频繁. 当 $\mu_i = \infty$，说明质点平均转移无穷次才能回到 i.

定义 3.1

设 i 是常返状态. 如果 i 的回转时间 $\mu_i < \infty$, 则称 i 是正常返状态. 如果 i 的回转时间 $\mu_i = \infty$, 则称 i 是零常返状态.

定理 3.2

设 i 是常返状态，则

(1) i 是零常返状态的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;

(2) 当 i 是零常返的，$i \to j$ 时，j 也是零常返的;

(3) 当 i 是正常返的，$i \to j$ 时，j 也是正常返的.

证明.
下面证明 (2). 由定理 2.3 (3) 我们知 $i \leftrightarrow j$. 设正整数 m, n 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} > 0$, 于是

$$p_{ii}^{(n+k+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(m)}.$$

由 $p_{ii}^{(n)} \to 0$, 我们有

$$\lim_{k\to\infty} p_{jj}^{(k)} \leq \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}} \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(n+k+m)} = 0.$$

这说明 j 是零常返的. 由 (2) 可得到 (3). □

命题 3.3

如果 j 不是正常返的，则对任意状态 i，有

$$p_{ij}^{(n)} \to 0, \text{ 当 } n \to \infty \text{ 时.}$$

证明.

对非常返的 j，由定理 2.3 (2) 我们有 $\sum_{i=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$，从而 $p_{jj}^{(n)} \to 0$. 对零常返的 j，利用定理 3.2 我们有 $p_{jj}^{(n)} \to 0$. 对任意状态 i，我们有

$$
\begin{aligned}
p_{(ij)}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)}
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$，右方的第一项 $\sum_{k=1}^{m} p_{jj}^{(n-k)} \to 0$，于是得到

$$
\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}.
$$

因为 $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \leq 1$，所以再令 $m \to \infty$ 我们就得到结论. $\square$

上面命题说明，只要 j 不是正常返的，从任何 i 出发，较长的时间后，质点位于 j 的概率非常小.

对于一般的马氏链 $\{X_n\}$，定义状态 i 的周期如下：

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$，则质点从 i 出发不可能再回到 i，这时称 i 的周期是 ∞.

(2) 设 d 为正整数，质点从 i 出发，如果只可能在 d 的整数倍上回到 i，而且 d 是具有此性质的最大正数，则称 i 的周期是 d;

(3) 如果 i 的周期为 1，则称 i 是非周期的.

其中的 (2) 说明，称状态 i 的周期是 d，如果 $p_{ii}^{(n)} > 0$，则必有 $n = md$，并且 d 是满足此性质最大的整数. 但当 i 的周期 $d < \infty$ 时，$p_{ii}^{(nd)} > 0$ 也不必对所有的 n 成立，但至少对某个 n 成立.

例 4.1

在直线上，如果质点每次向前、向后移动 1 步的概率都是 $1/3$，向后移动 2 步的概率也是 $1/3$，则每个状态都是非周期的.

证明.
易见

$$p_{ii}^{(2)} \geq p_{i,i+1}p_{i+1,i} > 0,$$

$$p_{ii}^{(3)} \geq p_{i,i_2}p_{i-2,i-1}p_{i-1,i} > 0,$$

于是从 $2 = nd, 3 = md$ 得到 $d = 1$. i 的周期是 $d = 1$，i 是非周期的. □

例 4.2

在直线上，如果质点每次向前移动 1 步的概率都是 p，向后移动 5 步的概率都是 $q = 1 - p$，$pq > 0$，则每个状态的周期都是 6.

证明.

质点从 i 出发，经过 n 次转移回到 i 时，我们说明 $n=6m$. 设质点向前一共移动了 k 次，向后一共移动了 m 次，根据题意得到 $k=5m$. 于是质点移动的次数 $n=k+m=5m+m=6m$. 又由于 $p_{ii}^{(6)}>p^5q>0$，所以状态 i 的周期是 $d=6$. □

以后总用 d_i 表示 i 的周期. 下面的定理给出了周期 d_i 的数字描述.

定理 4.3

若状态 i 的周期 $d_i < \infty$，则

(1) d_i 是数集 $B_i = \{n | p_{ii}^{(n)} > 0, n \geq 1\}$ 的最大公约数;

(2) 如果 $i \leftrightarrow j$，则 $d_i = d_j$;

(3) 存在正数 N_i 使得当 $n \geq N_i$ 时，$p_{ii}^{(nd_i)} > 0$.

证明.

(1) 由定义直接可得.

(2) 设正整数 m, n 使得 $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0$. 对于任意 $k \in B_i = \{k | p_{ii}^{(k)} > 0, k \geq 1\}$，我们有

$$p_{jj}^{(m+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(n)} > 0,$$

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(n)} > 0.$$

于是 d_j 整除 $m+n$ 和 $m+k+n$，于是 $k | (m+k+n)-(m+n)$，于是整除 B_i 中的所有元，从而得到 d_j 整除 d_i. 对称地我们可以得到 d_i 整除 d_j，所以 $d_i = d_j$.

□

状态的互通性
常返与非常返态
正常返与零常返状态
周期及其性质
遍历状态
状态空间的分解

证明.

(3) 设 (1) 中的 $B_i = \{n_1, n_2, \cdots\}$，$l_m$ 是子集 $\{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$ 的最大公约数，则 d_i 是 l_m 的约数，且 l_m 单调不增收敛到 d_i. 因为 l_m 是整数，所以有 k 使得 $d_i = l_k$ 是 $\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ 的最大公约数. 根据数论的基本知识知道存在 N_i，使得只要 $n \geq N_i$，就有

$$nd_i = n_1 m_1 + \cdots + n_k m_k,\ \ m_i\text{是非负整数}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(nd_i)} &\geq p_{ii}^{(n_1 m_1)} p_{ii}^{(n_2 m_2)} \cdots p_{ii}^{(n_k m_k)} \\ &\geq [p_{ii}^{(n_1)}]^{m_1} [p_{ii}^{(n_2)}]^{m_2} \cdots [p_{ii}^{(n_k)}]^{m_k} > 0. \end{aligned}$$

$\square$

定义 5.1

如果状态 i 是正常返和非周期的，则称 i 是遍历状态.

定理 5.2

设常返状态 i 有周期 d_i 和平均回转时间

$$\mu_i = E[T_i | X_0 = i],$$

则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{\mu_i}.$$

上面定理表明，质点从常返状态 i 出发后，对于充分大的 n，质点在第 nd_i 步回到 i 的概率与 d_i 成正比，与回转时间 μ_i 成反比.

根据本讲中的讨论，对于常返状态 i，如果 $i \to j$，i 的性质就会传递给 j：这时有 $j \leftrightarrow i$；$d_j = d_i$；$\mu_j < \infty$ 的充分必要条件是 $\mu_i < \infty$；当 $n \to \infty$ 时，$p_{jj}^{(n)}$ 的充分必要条件是 $p_{ii}^{(n)} \to 0$. 这些结果说明 $i \leftrightarrow j$ 时，j 是正常返状态的充分必要条件为 i 是正常返状态；j 是遍历状态的充分必要条件为 i 为遍历状态.

如果 i 是非常返状态，从 $i \to j$ 我们还不能得到关于 j 的更多信息. 这时 j 可以是常返的 (参考两边是吸收壁的简单随机游动中的 0 或 n)，也可以是非常返的 (参考两边是吸收壁的简单随机游动中的 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$).

命题 5.3

对于常返状态 j，有

(1) $\mu_j \geq 1$;

(2) 当 $i \to j$ 时，质点从 i 出发以概率 1 到达 j:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1;$$

(3) 当 j 是遍历状态，$i \leftrightarrow j$ 时，有

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j := 1/\mu_j.$$

证明.

(1) 由 (3.1) 我们知

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1.$$

(2) 实际上在定理 2.3 (3) 的证明过程中我们已经证明了这一点.

证明.

(3) 遍历状态的周期是 1，所以用定理 5.2 我们有

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} \in (0,1].$$

对于 $1 \le m \le n$，我们有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=m+1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.$$

令 $n\to\infty$ 时，右边第一项收敛到 $\sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)}\pi_j$，第二项极限不超过 $b_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)}$，于是得到

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{(k)}\pi_j + O(b_m).$$

再令 $m\to\infty$，注意到 $b_m \to 0$ 并利用 (2) 我们知结论成立. □

状态的互通性
常返与非常返态
正常返与零常返状态
周期及其性质
遍历状态
状态空间的分解

定义 6.1

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间，$i \in I$. 把和 i 互通的状态放在一起，得到集合

$$C = \{j | j \leftrightarrow i, j \in I\}.$$

(1) 称 C 是一个等价类；

(2) 如果 I 是一个等价类 (所有状态互通)，则称马氏链 $\{X_n\}$ 或状态空间 I 不可约；

(3) 设 B 是 I 的子集，如果质点不能从 B 中的状态到达 $B^c = I - B$ 中的状态，则称 B 是闭集.

我们知道如果等价类 C 中有一个常返状态，则 C 中的一切状态都是常返的，这时称 C 是常返等价类.

定理 6.2

设 C 是一个等价类，则有以下结果：

(1) 不同的等价类互不相交.

(2) C 中的状态有相同的类型：或都是正常返的，或都是零常返的，或都是非常返的. 在任何情况下，C 中的状态有相同的周期.

(3) 常返等价类是闭集：质点不能走出常返等价类.

(4) 零常返等价类含有无穷个状态.

(5) 非常返等价类如果是闭集，则含有无穷个状态.

证明.

设 C 和 C_1 都是等价类，如果有 $i \in C \cap C_1$，由互通的传递性我们知 i 和 $C \cup C_i$ 中的所有状态互通，于是必有 $C = C_1$. 所以 (1) 成立.

由定理 4.3 和定理 3.2 我们可得 (2).

如果 $i \in C$，$i \to j$，由定理 2.3 我们有 $i \leftrightarrow j$，从而 $j \in C$. 于是 (3) 成立.

(4) 和 (5) 的证明：因为 C 是闭集，所以有

$$\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

由命题 3.3，如果 C 是零常返或非常返等价类，当 $n \to \infty$ 时，总有 $p_{ij}^{(n)} \to 0$. 如果 C 中只有有限个状态，在上式中令 $n \to \infty$，我们得 $0 = 1$. 这说明 C 不能是有限集合. $\square$

于是我们知，当 C 中有正常返状态，则 C 中的所有状态都是正常返的，于是称 C 是正常返等价类；当 C 中有零常返状态，则 C 中的所有状态都是零常返的，于是称 C 是零常返等价类；当 C 中有非常返状态，于是称 C 是非常返等价类；当 C 的某个状态有周期 d，则 C 中所有状态的周期都是 d，于是称 C 的周期是 d；当 C 中有一个遍历状态，C 中的状态都是遍历的，这时又称 C 是遍历等价类.
利用等价关系可以把马氏链的状态空间 I 分解成

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} C_j + T,\ \text{这里}\ n \leq \infty, \tag{6.1}$$

其中 C_j 是常返等价类，T 由全体非常返状态组成. 质点可以永远在 T 中运动，也可以从 T 转移到某个 C_j 中，然后永远在 C_j 中运动. 如果 T 是有限集合，质点一定会走出 T，进入某个闭集 C_j，然后永远在 C_j 中运动.

按照 (6.1) 的规律重新编排状态的顺序后可以将该马氏链的转移矩阵写成

$$
\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} & C_m & T \end{array} \\
\begin{pmatrix}
P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & P_m & 0 \\
R_1 & R_2 & \cdots & R_{m-1} & R_m & Q_T
\end{pmatrix}
\end{array}
= P. \tag{6.2}
$$

由于常返等价类 C_k 是闭集，所以对应的 $P_k = (p_{ij})_{i,j\in C_k}$ 的每行之和是 1. 这就相当于 C_k 本身是一个不可约马氏链，质点从 C_j 中的状态出发或从 T 进入 C_j 后就永远在 C_j 中运动.

利用 $P^{(n)}=P^n$ 和矩阵乘法得到

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} & C_m & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_m^n & 0 \\ R_1^{(n)} & R_2^{(n)} & \cdots & R_{m-1}^{(n)} & R_m^{(n)} & Q_T^n \end{pmatrix} \end{array} = P^{(n)}. \qquad (6.3)$$

由于马氏链 $\{X_n\}$ 可以有无穷个常返等价类，所以 (6.2) 和 (6.3) 中的 C_m，P_m，R_m 和 P_m^n，$R_m^{(n)}$ 可以同时改写为 “$\cdots$”. P_m^n 的每行之和等于 1. 另外，用 $q_{ij}^{(n)}$ 表示 Q_T^n 的对应元素，于是由命题 3.3，我们还有

$$\lim_{n\to\infty} Q_T^n = (\lim_{n\to\infty} q_{ij}^{(n)})_{i,j\in T} = 0.$$

定义 7.1

设 I 是马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间，$i \in I$. 把和 i 互通的状态放在一起，得到集合

$$C = \{j | j \leftrightarrow i, j \in I\}.$$

(1) 称 C 是一个等价类；
(2) 如果 I 是一个等价类 (所有状态互通)，则称马氏链 $\{X_n\}$ 或状态空间 I 不可约；
(3) 设 B 是 I 的子集，如果质点不能从 B 中的状态到达 $B^c = I - B$ 中的状态，则称 B 是闭集.

我们知道如果等价类 C 中有一个常返状态，则 C 中的一切状态都是常返的，这时称 C 是常返等价类.

定理 7.2

设 C 是一个等价类，则有以下结果：

(1) 不同的等价类互不相交.

(2) C 中的状态有相同的类型：或都是正常返的，或都是零常返的，或都是非常返的. 在任何情况下，C 中的状态有相同的周期.

(3) 常返等价类是闭集：质点不能走出常返等价类.

(4) 零常返等价类含有无穷个状态.

(5) 非常返等价类如果是闭集，则含有无穷个状态.

证明.

设 C 和 C_1 都是等价类，如果有 $i \in C \cap C_1$，由互通的传递性我们知 i 和 $C \cup C_i$ 中的所有状态互通，于是必有 $C = C_1$. 所以 (1) 成立.
由定理 4.3 和定理 3.2 我们可得 (2).
如果 $i \in C$，$i \to j$，由定理 2.3 我们有 $i \leftrightarrow j$，从而 $j \in C$. 于是 (3) 成立.
(4) 和 (5) 的证明：因为 C 是闭集，所以有

$$\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

由命题 3.3，如果 C 是零常返或非常返等价类，当 $n \to \infty$ 时，总有 $p_{ij}^{(n)} \to 0$. 如果 C 中只有有限个状态，在上式中令 $n \to \infty$，我们得 $0 = 1$. 这说明 C 不能是有限集合. $\square$

于是我们知，当 C 中有正常返状态，则 C 中的所有状态都是正常返的，于是称 C 是正常返等价类；当 C 中有零常返状态，则 C 中的所有状态都是零常返的，于是称 C 是零常返等价类；当 C 中有非常返状态，于是称 C 是非常返等价类；当 C 的某个状态有周期 d，则 C 中所有状态的周期都是 d，于是称 C 的周期是 d；当 C 中有一个遍历状态，C 中的状态都是遍历的，这时又称 C 是遍历等价类.

利用等价关系可以把马氏链的状态空间 I 分解成

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} C_j + T,\ \text{这里 } n \leq \infty, \tag{7.1}$$

其中 C_j 是常返等价类，T 由全体非常返状态组成. 质点可以永远在 T 中运动，也可以从 T 转移到某个 C_j 中，然后永远在 C_j 中运动. 如果 T 是有限集合，质点一定会走出 T，进入某个闭集 C_j，然后永远在 C_j 中运动.

按照 (6.1) 的规律重新编排状态的顺序后可以将该马氏链的转移矩阵写成

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} & C_m & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_m & 0 \\ R_1 & R_2 & \cdots & R_{m-1} & R_m & Q_T \end{pmatrix} \end{array} = P. \tag{7.2}$$

由于常返等价类 C_k 是闭集，所以对应的 $P_k = (p_{ij})_{i,j\in C_k}$ 的每行之和是 1. 这就相当于 C_k 本身是一个不可约马氏链，质点从 C_j 中的状态出发或从 T 进入 C_j 后就永远在 C_j 中运动.

利用 $P^{(n)}=P^n$ 和矩阵乘法得到

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \\ T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} & C_m & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_m^n & 0 \\ R_1^{(n)} & R_2^{(n)} & \cdots & R_{m-1}^{(n)} & R_m^{(n)} & Q_T^n \end{pmatrix} \end{array} = P^{(n)}. \qquad (7.3)$$

由于马氏链 $\{X_n\}$ 可以有无穷个常返等价类，所以 (6.2) 和 (6.3) 中的 C_m，P_m，R_m 和 P_m^n，$R_m^{(n)}$ 可以同时改写为 "$\cdots$". P_m^n 的每行之和等于 1. 另外，用 $q_{ij}^{(n)}$ 表示 Q_T^n 的对应元素，于是由命题 3.3，我们还有

$$\lim_{n\to\infty} Q_T^n = (\lim_{n\to\infty} q_{ij}^{(n)})_{i,j\in T} = 0.$$