第 19 讲 简单随机游动的常返性，质点在常返等价类中的转移

简单随机游动

简单随机游动中所有状态互通，$\{X_n\}$ 是一个不可约马氏链，I 是一个等价类. 要研究 I 是否为常返等价类，只要研究状态 i. 如果质点在第 $2n$ 步回到 i，则向左和向右各移动了 n 次. 设每次移动向右的概率为 p，由二项分布的性质我们可以得到

$$p_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n q^n, \ p_{ii}^{(2n-1)} = 0.$$

当 $s = 4pq < 1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots\frac{2n-1}{2}s^n = (1-s)^{-1/2}. \text{ (用 Taylor 级数展开)}$$

由于 $4pq \le 1$，且 $4pq = 1$ 的充分必要条件是 $p = q$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ 的充分必要条件是 $p = q$. 于是 $p = q$ 时，直线上的简单对称随机游动是常返的. 当 $p \neq q$ 时，非对称的简单随机游动是非常返的.

用 $a_n \simeq b_n$ 表示 $a_n/b_n \to 1(n\to\infty)$. 利用斯特林公式

$$n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \tag{1.1}$$

可以进一步证明简单对称随机游动是零常返的. 实际上，由上式我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n)} &= \lim_{n\to\infty} C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{2^2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n e^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

于是 i 是零常返的.

对于上例, 我们也可以直接论证对称情形下的常返性并确定在非对称情形下从 0 出发最终回到 0 的概率. 记

$$\beta = P(\text{最终回到 } 0).$$

为了确定 β, 先以初始转移为条件得到

$$\beta = P(\text{最终回到 } 0|X_1 = 1)p + P(\text{最终回到 } 0|X_1 = 1)(1-p).$$

设 α 为当前状态是 1 的马尔可夫链最终回到状态 0 的概率. 为了得到 α 的一个方程, 以下一次的转移为条件, 得到

$$\begin{aligned}\alpha =& P(\text{最终回到 } 0|X_1 = 1, X_2 = 0)(1-p) + P(\text{最终回到 } 0|X_1 = 1, X_2 = 2)p \\ =& 1 - p + P(\text{最终回到 } 0|X_1 = 1, X_2 = 2)p \\ =& 1 - p + p\alpha^2,\end{aligned}$$

其中最后一个等式是由由此得到的: 如果马氏链最终要从状态 2 到状态 0, 那么必须首先到达状态 1, 这最终发生的概率也是 α; 如果它最终到达了状态 1, 那么接下来最终回到状态 0 的概率为 α. 所以

$$\alpha = 1 - p + p\alpha^2.$$

这个方程的两个根是 $\alpha = 1$ 和 $\alpha = (1-p)/p$. 因此, 在 $p = 1/2$ 的对称随机游动情形下, $\alpha = 1$. 由对称性可得, 给定当前状态是 -1 的马氏链最终回到状态 0 的概率也是 1, 这就证明了对称随机游动是常返的.

对于非对称情形，应用强大数定律我们知此时随机游动所有状态都是非常返态，于是 $\beta < 1$. 现在假设 $p > 1/2$, 我们知 $P(\text{最终回到 } 0|X_1 = -1) = 1$. 因此，我们有

$$\beta = \alpha p + 1 = p.$$

因为在这种情形下随机游动是非常返的，所以 $\beta < 1$, 这证明了 $\alpha \neq 1$. 因此 $\alpha = (1-p)/p$, 从而

$$\beta = 2(1-p), \ p > 1/2.$$

类似地，当 $p < 1/2$ 时，我们可以证明 $\beta = 2p$. 于是，一般地，

$$P(\text{最终回到 } 0) = 2\min(p, 1-p).$$

两端是吸收壁和两端是反射壁的简单随机游动

在两端是吸收壁的简单随机游动中，$\{1,2,\cdots,n-1\}$ 是一个等价类. 因为质点从 1 出发后不回到 1 的概率 $1-f_{11}^* > P(X_1=0|X_0=1)=q>0$，所以 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 是非常返等价类，$\{0\}$ 和 $\{n\}$ 是正常返等价类.

在两端是反射壁的简单随机游动中，$\{0,1,2,\cdots,n\}$ 是一个等价类. 由于 I 是闭集，且只有 $n+1$ 个状态. 所以 I 是正常返等价类.

平面上的简单对称随机游动

设质点在平面的整数格点上做随机游动，每次以 $1/4$ 的概率向最邻近的 4 个状态转移. 将所有的格点编号后得到状态空间 I. 易见 I 的状态互通，因而是一个等价类. 质点从 i 出发后，只可能在 $2n$ 步上回到 i，这时质点向左、右各移动 k 步，向上、下各移动 $n-k$ 步. 用组合公式 $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$，利用斯特林公式 (1.1)，以及 (1.2) 我们有

$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(2n)} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} C_{2n}^{n} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = (\frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n})^2 \\
&\simeq 1/(\pi n).
\end{aligned}
$$

由于 $\sum_{n\geq 1} n^{-1} = \infty$，所以平面上的简单对称随机游动也是常返的，再从 $p_{ii}^{(2n)} \to 0$ 知道，平面上的简单对称随机游动是零常返的.

三维空间上的简单对称随机游动

设质点在三维直角坐标中的整数格点上做随机游动，每次以 $1/6$ 的概率向最邻近的 6 个状态转移. 将所有的格点编号后得到状态空间 I. 易见 I 的状态互通，因而是一个等价类. 设 $K_n = \{j,k|j,k \geq 0, j+k \leq n\}$，则

$$p_{ii}^{(2n+1)} = 0,$$

$$p_{ii}^{(2n)} = \frac{1}{6^{(2n)}} \sum_{j,k \in K_n} \frac{(2n)!}{[j!k!(n-j-k)!]^2}.$$

可以验证 $k = j = [n/3]$ (与 $n/3$ 最近的整数)，$n!/(j!k!(n-j-k)!)$ 达到最大值，再用斯特林公式得到

$$\frac{1}{3^n} \max_{j,k \in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = O(n^{-1}).$$

上式与三项公式

$$\sum_{j,k\in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = (1+1+1)^n = 3^n$$

结合，得到

$$p_{ii}^{(2n)} \leq \frac{1}{2^{2n}3^{2n}} C_{2n}^{n} \max_{j,k\in K_n} \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} 3^n = O(n^{-3/2}).$$

由于 $\sum_{n\geq 1} n^{-3/2} < \infty$，所以三维空间中的简单对称随机游动是非常返的.

当 C 是常返等价类时，我们知 C 是闭集. 质点从 C 中出发将永远在 C 中运动. 质点在 C 中的运动也是一个马氏链，仍然用 $\{X_n\}$ 表示.

例 2.1

考虑直线上的简单对称随机游动. 这时,状态空间 $I = \{j|j = 0, 1, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 中的所有状态互通，是一个常返等价类，有周期 $d = 2$. 用 G_1 表示所有的奇数，用 G_2 表示所有的偶数，则 $I = G_1 \cup G_2$. 质点从偶数状态出发，第 1 步进入 G_1，第 2 进入 G_2，第 3 步进入 $G_3 = G_1$，$\cdots$，第 $n = md - 1$ 步进入 $G_{md-1} = G_1$，第 $n = md$ 步进入 $G_{md} = G_2$，周而复始.

定理 2.2

设常返等价类 C 有周期 $d > 1$. 取定 C 中的状态 i. 对于 $j \in C$,

(1) 有唯一的 $r \in \{1, 2, \cdots, d\}$，使得只要 $p_{ij}^{(n)} > 0$，则有 $n = kd + r$;

(2) 对于 (1) 中的 r，存在 N_j 使得 $n > N_j$ 时，$p_{ij}^{(nd+r)} > 0$;

(3) $f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(nd+r)} = 1$.

证明.

因为 $j \leftrightarrow i$，所以有 k 使得 $p_{ji}^{(k)} > 0$.

(1) 如果 n, m 使得 $p_{ij}^{(n)} p_{ij}^{(m)} > 0$，则有

$$p_{ii}^{(n+k)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)} > 0,$$

$$p_{ii}^{(m+k)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(k)} > 0.$$

由周期的定义我们知 $n+k, m+k$ 都是周期 d 的倍数，所以 $n-m=(n+k)-(m+k)$ 也是 d 的倍数. 这说明 n, m 被 d 除后有相同的余数，即存在唯一的 $r \in \{1, 2, \cdots, d\}$，使得

$$n = k_1 d + r, \ \ m = k_2 d + r.$$

证明.

(2) 设 $p_{ij}^{(Nd+r)} > 0$. 则存在 N_j 使得当 $m > N_j$ 时，$p_{jj}^{(md)} > 0$. 当 $n > N + N_j$ 时有 $m = (n - N) > N_j$，于是有

$$p_{ij}^{(nd+r)} \geq p_{ij}^{(Nd+r)} p_j j^{(nd-Nd)} = p_{ij}^{(Nd+r)} p_{jj}^{(md)} > 0.$$

(3) 由于 $f_{ij}^{(n)}$ 是质点从 i 出发在第 n 步首次到达 j 的概率，所以 $f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)}$. 于是只要 n 使得 $f_{ij}^{(n)} > 0$ 时，就有 $p_{ij}^{(n)} > 0$，从而有 $n = kd + r$，我们知

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(nd+r)} = 1. \qquad \square$$

对于固定的 $i \in C$，定理 2.2 的 (1) 说明，质点从 i 出发后，只可能在 $t = kd + r$ 时转移到状态 j，r 是和 j 有关的正整数；性质 (2) 说明在时间充分长后，质点可以在任何时刻 $t = nd + r$ 到达 j. 现在定义

$$C_r = \{j | \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(nd+r)} > 0\}, \ r = 1, 2, \cdots, d$$

质点从 i 出发后，只能在时刻

$$r, d + r, 2d + r, \cdots$$

进入集合 G_r，于是得到 d 个互不相交的 $G_1, G_2, \cdots, G_d$. 质点在这些集合中的转移规律如下，质点从 i 出发后，第 1 步进入 G_1，第 2 步进入 G_2，$\cdots$，第 d 步进入 G_d. 第 $d+1$ 步进入 $G_{d+1} = G_1$，$\cdots$，依次循环.

命题 2.3

对于有周期 d 的正常返等价类 C 和 $i, j \in C$，有唯一的 $r(1 \le r \le d)$，使得当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} p_{ij}^{(nd+s)} = \frac{1}{d} p_{ij}^{(nd+r)} \to \frac{1}{\mu_j}.$$

证明.

根据定理 2.2 (1)，有唯一的 $r \in \{1, 2, \cdots, d\}$ 使得只要 $p_{ij}^{(n)} > 0$，则有 $n = kd + r$，所以

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} p_{ij}^{(nd+s)} = \frac{1}{d} p_{ij}^{(nd+r)}.$$

当 $f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(nd+r-k)} > 0$ 时，有 $p_{ij}^{(k)} \geq f_{ij}^{(k)} > 0$，于是有 $k = ld + r$. 于是

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(nd+r)} &= \sum_{k=1}^{nd+r} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(nd+r-k)} \\ &= \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{(nd-ld)} \\ &= \sum_{l=1}^{h} f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{(nd-ld)} + \sum_{l=h+1}^{n} f_{ij}^{(ld+r)} p_{jj}^{(nd-ld)}. \end{aligned}$$

证明.

当 $n \to \infty$，用 $p_{jj}^{(nd-ld)} \to d/\mu_j$ 得到右边的第一项收敛到

$$\sum_{i=1}^{h} f_{ij}^{(ld+r)} \frac{d}{\mu_j},$$

第二项的极限不超过 $b_h \equiv \sum_{l=h+1}^{\infty} f_{ij}^{(ld+r)}$，即有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{\mu_j} \sum_{l=1}^{h} f_{ij}^{(ld+r)} + O(b_h).$$

令 $h \to \infty$，用 $\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(ld+r)} = 1$ 和 $b_h \to \infty$ 可得. $\square$

命题 2.4

对于有周期 d 的正常返等价类 C 和 $i,j\in C$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{1}{\mu_j}.$$

证明.

由前一命题我们有

$$a_l = \frac{1}{d}\sum_{s=1}^{d} p_i j^{(ld+s)} \to \frac{1}{\mu_j}, \text{ 当 } l \to \infty \text{ 时.}$$

于是当 $m \to \infty$ 时，有

$$\frac{1}{md}\sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{d}\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{s=1}^{d} p_{ij}^{(ld+s)} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} a_l \to \frac{1}{\mu_j}.$$

对于任意自然数 n，存在 m 使得 $(m-1)d < n \leq md$. 再由

$$\frac{1}{(m-1)d}\sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \leq \frac{1}{(m-1)d}\sum_{k=1}^{md} p_{ij}^{(k)},$$

让 $n \to \infty$ 从而得证.

□