第 22 讲 第三部分总结：离散时间马尔可夫链

课程第三部分总结

例题

1. 马尔可夫链的定义
2. 柯尔莫哥洛夫-切普曼方程
3. 状态的命名与状态空间的分类　重点：常返与非常返态，正常返与零常返态，状态空间的分解
4. 不变分布　重点：求不变分布
5. 离散时间分支过程

例 2.1

对于固定的 j, 证明 $M(n)=\max\{p_{ij}^{(n)}|i\in I\}$ 关于 n 单调不增, $m(n)=\min\{p_{ij}^{(n)}|i\in I\}$ 关于 n 单调不减.

证明.
因为

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in I} p_{ik} p_{kj}^{(n)} \le \sum_{k\in I} p_{ik} M(n) = M(n),$$

我们有 $M(n+1) \le M(n)$，类似地 $m(n+1) \ge m(n)$. $\square$

例 2.2

如果 i 是常返状态, j 是非常返态, 证明对 $n \geq 0$,

$$p_{ij}^{(n)} = 0.$$

证明.
若不然，则存在 $n > 1$，使得
$$p_{ij}^{(n)} > 0.$$
于是 $i \to j$. 而 i 是常返的，则 j 也是常返的 (课本定理 3.1)，矛盾. $\square$

例 2.3

马氏链的状态空间是 $I=\{1,2,3,4,5\}$，转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

界定马氏链的状态.

解.

$\{1,2\}$ 是常返等价类，$3,4$ 非常返，5 是吸引状态. $\square$

例 2.4

令 P 是某个马氏链的转移概率矩阵. 假设存在自然数 r，使得 P^r 的每个元素都严格大于 0. 证明：对于所有的自然数 $n \geq r$，P^n 的每个元素都严格大于 0.

证明.

由 K-C 方程，我们知对于任意自然数 $n \geq r$，以及任意 $i, j \in I$

$$(P^n)_{ij} = \sum_{k \in I} (P^{n-r})_{ik} (P^r)_{kj}.$$

由 P 是概率矩阵我们知存在 $k_0 \in I$ 使得 $(P^{n-r})_{ik} > 0$，所以

$$(P^n)_{ij} \geq (P^{n-r})_{ik_0} (P^r)_{k_0 j} > 0.$$

□

例 2.5

马氏链的状态空间是全体正整数，并且 $p_{i,i+1} = p_{i1} = 1/2$.

(a) 说明这是一个不可约马氏链，计算 $f_{(11)}^{(n)}$;

(b) 证明这个马氏链是遍历的.

证明.

(a) 注意到 $i \to 1$，以及 $1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to i-1 \to i$，所以所有状态互通，该马氏链不可约. 从 1 出发转移 n 次首次回到 1，只有一种路径 $1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n-1 \to 1$，从而 $f_{11}^{(n)} = (\frac{1}{2})^n$.

(b) 由 $\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n < \infty$ 我们知 1 是正常返的，且由 $p_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}$ 知 1 是非周期的，于是 1 是遍历状态，再由该马氏链不可约我们知其为遍历马氏链. □

例 2.6

超市李经理对于同类苹果有低、中、高三种定价方法，分别记做 $1, 2, 3$. 用 p_i 表示定价为 i 时销量好的概率. 根据调查得到 $p_1 = 0.9, p_2 = 0.6, p_3 = 0.3$. 李经理的定价策略是：如果今天销量好，明天就在三种定价中随机选一种；如果今天销量不好，明天就用低定价. 如何评价这三种定价的平均使用率?

解.

用 X_n 表示第 n 天的定价，用 A_n 表示第 n 天销量好. 利用

$$
\begin{aligned}
p_{ij} &= P(X_{n=1} = j | X_n = i) \\
&= P(A_n | X_n = i) P(X_{n+1} = j | X_n = i, A_n) + P(\overline{A_n} | X_n = i) P(X_{n+1} = j | X_n = i, \overline{A_n}).
\end{aligned}
$$

可以得出 $p_{i1} = p_i/3 + q_i = 1 - 2p_i/3$, $p_{i2} = p_i/3$, $p_{i3} = p_i/3$. 于是一步转移概率矩阵为

$$
P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.
$$

我们需要求平均使用率，即需要求不变分布. 解方程组 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)P = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$，$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$，我们可得

$$
(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{7}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}) = (0.5385, 0.2308, 0.2308). \qquad \square
$$

例 2.7

对某地区来讲，判断明天是否下雨只需要看今天是否有雨．今天有雨时，明天有雨的概率为 a；今天无雨时，明天无雨的概率是 b．用 $X_n=0$ 表示第 n 天有雨，$X_n=1$ 表示第 n 天无雨时，验证 $\{X_n\}$ 是马氏链．当 $a,b\in(0,1)$ 时，

(a) 给出一步转移概率矩阵;

(b) 给出不变分布;

(c) 对于将来的某一天，有雨的概率是多少?

解.

(1) $P = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$.

(2) 解方程组 $\pi P = \pi$, $\pi_0 + \pi_1 = 1$ 可以得到不变分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1) = (\frac{1-b}{2-b-a}, \frac{1-a}{2-b-a})$.

(3) π_0. $\square$

例 2.8

设马氏链的状态空间是 $I=\{1,2,3\}$，转移概率矩阵是

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/4 & 3/4\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) 证明 I 是遍历等价类;

(b) 计算不变分布 $\boldsymbol{\pi}$ 和 $\lim_{n\to\infty} P^n$.

解.

(a) 注意到所有状态互通，所以该马氏链不可约. 注意 $p_{22}^{(1)} > 0$ 于是 2 是非周期的，从而由不可约性该马氏链非周期. 注意状态空间有限，由不可约性知所有状态正常返. 所以该马氏链是遍历马氏链.

(b) $[3/8, 1/4, 3/8]$, $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$\square$

例 2.9

陈教授有 r 把雨伞，上午上班时下雨就带一把雨伞去办公室，下午下班时下雨就带一把回家（中午不回家），其他情况不带雨伞．假设上下班是否有雨是相互独立的，有雨的概率是 p．求陈教授被雨淋的概率．若 $r=3$，p 多大可以使得他被淋雨的概率最大?

解.

令状态为陈教授身边的雨伞数，则定义的马氏链有 $r+1$ 个状态，且转移概率为

$$p_{0,r}=1,\ p_{i,r-i}=1-p, P_{i,r-i+1}=p,\ i=1,\cdots,r.$$

求不变分布

$$\begin{cases}\pi_r=\pi_0+\pi_1 p,\\ \pi_j=\pi_{r-j}(1-p)+\pi_{r-j+1}p,\ 1\le j\le r,\\ \pi_0=\pi_r(1-p),\\ \pi_0+\pi_1+\cdots+\pi_r=1.\end{cases}$$

可解得：

$$\pi_i=\begin{cases}\frac{q}{r+q} & i=0,\\ \frac{1}{r+q} & i=1,\cdots,r,\end{cases}$$

其中 $q=1-p$. 于是这个马尔可夫链是遍历的. 于是我们知被雨淋的概率为 $g(p)=p\pi_0=\frac{pq}{r+q}$. 特别地当 $r=3$ 时 $g(p)=\frac{p-p^2}{4-p}$. 求最大值可得当 $p=4-2\sqrt{3}\approx 0.5359$ 时被淋雨的概率最大. □

例 2.10

设甲袋中有 k 个白球和 1 个黑球，乙袋中有 $k+1$ 个白球，每次从两袋中各取一球，交换后放入对方的袋中。证明经过 n 次交换后，黑球仍在甲袋中的概率 p_n 满足 $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

证明.

以 X_n 表示第 n 次取球后黑袋中的黑球数，则 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是状态空间 $S=\{0,1\}$ 的时齐 Markov 链，一部转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} \frac{k}{k+1} & \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{k}{k+1}, \end{pmatrix}$$

则它的平稳不变分布满足

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{k}{k+1}\pi_0 + \frac{1}{k+1}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{k=1}\pi_0 + \frac{k}{k+1}\pi_1, \end{cases}$$

且 $\pi_0+\pi_1=1$. 求解得 $\pi=(1/2,1/2)$, 于是 $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$. $\square$

例 2.11

蜘蛛和蝇在位置 $0, 1$ 相互独立地随机转移, 分别有转移概率矩阵 $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p' & q' \\ q' & p' \end{pmatrix}$, 其中 $q = 1 - p, q' = 1 - p'$, $pqp'q' > 0$. 二者相遇时发生捕食.

(a) 设计状态空间为 $\{a, b, c\}$ 的马氏链描述以上捕食过程, 写出转移概率;

(b) 计算 (a) 中的马氏链在第 n 步回到初始位置 a 的概率 $p_{aa}^{(n)}$;

(c) 当 $X_0 = a$ 时, 计算等待捕食的平均时间.

解.

用 ξ_n 和 η_n 表示时刻 n 时蜘蛛和蝇的位置，$X_n = (\xi_n, \eta_n)$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 是马氏链，3 个状态分别是 $a = (0,1)$，$b = (1,0)$，$e = (0,0) \cup (1,1)$. c 是吸引状态，a，b 是非常返状态.

$$P = \begin{pmatrix} pp' & qq' & pq' + qp' \\ qq' & pq' & pq' + qp' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若第 n 步回到初始状态，马氏链 $\{X_n\}$ 只能在 a，b 之间转移，从 a 到 b 的转移步数等于从 b 到 a 的转移步数，于是有

$$p_{aa}^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} (qq')^{2k} (pp')^{n-2k} = \frac{1}{2}[(pp' + qq')^n + (pp' - qq')^n].$$

解.

由状态 a，b 的对称性得到 $p_{bb}^{(n)} = p_{aa}^{(n)}$，同理得到 $p_{ba}^{(n)} = p_{ab}^{(n)}$，

$$p_{ab}^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k+1}(qq')^{2k+1}(pp')^{n-2k-1} = \frac{1}{2}[(pp'+qq')^n - (pp'-qq')^n].$$

设 $\tau = \min\{n|X_n = c\}$，则 $P(\tau = n|X_0 = a) = f_{ac}^{(n)} = p_{aa}^{(n-1)}p_{ac} + p_{ab}^{(n-1)}p_{bc}$. 于是得到平均捕食时间为

$$E[\tau|X_0 = a] = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ac}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} n(pp'+qq')^{n-1}p_{ac} = 1/(pq'+qp'). \qquad \square$$