第 23 讲 连续时间马氏链

定义
泊松过程是马氏链
转移速率矩阵

设 $\{X_n\}$ 是前面提到的马氏链，有状态空间 I，一步转移概率

$$p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i), \quad i, j \in I,$$

满足 $p_{ii} = 0$, $i \in I$. 因为该马氏链 $\{X_n\}$ 的时间指标 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 是离散的，所以又称为离散时间马氏链.

考虑一个质点按照上述马氏链在 I 中转移. 对于任何 $i \in I$，质点每次到达 i 后，在 i 的停留时间是独立同分布的随机变量，有公共的总体分布 $\mathcal{E}(q_i)$，停留结束后再以概率 p_{ij} 转移到状态 $j(j \neq i)$. 进一步假定质点在各状态的停留时间是相互独立的，用 $X(t)$ 表示 t 时质点所处的状态，则得到随机过程 $\{X(t)\} = \{X(t) \mid t \geqslant 0\}$. 这样的随机过程就是本章要仔细研究的连续时间马氏链. 如果不考虑停留时间的长短，只考虑 $\{X(t)\}$ 的一次次转移，则又得到了 $\{X_n\}$.

定义

泊松过程是马氏链

转移速率矩阵

设 I 是状态空间，$\{X(t)\} = \{X(t)|t \geq 0\}$ 是以 I 为状态空间的连续时间随机过程.

定义 1.1

如果对任何正整数 n, $t_0 < t_1 < \cdots < \cdots < t_{n+1}$ 和 $i, j, i_0, i_1, \cdots, i_{n-1} \in I$，有

$$P(X(t_{n+1}) = j|X(t_n) = i, \cdots, X(t_0) = i_0) = P(X(t_{n+1}) = j|X(t_n) = i),$$

则称 $\{X(t)\}$ 是连续时间离散状态的马氏链，简称为连续时间马氏链.

上面定义中的“链”表明状态空间 I 是离散的. 和离散时间马氏链的情况相同, 我们称具有性质

$$P(X(t+s)=j|X(s)=i)=P(X(t)=j|X(0)=i),\ \ s,t\geq 0$$

的马氏链为时齐马氏链. 时齐性表明转移概率

$$p_{ij}(t)=P(X(t+s)=j|X(s)=i) \tag{1.1}$$

与起始时间 s 无关.

无特别说明时。以后的马氏链都是时齐马氏链，并且简称为马氏链.

连续时间马氏链和离散时间马氏链的定义形式上非常相似，因此连续时间马氏链也会具有很多与离散时间马氏链类似的性质，我们列举如下：

(1) $p_{ij}(0)$ 是 δ 函数：

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \in I, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(2) 对于 $t > 0$，已知 $X(t) = i$ 的条件下，将来 $\{X(u)|u > t\}$ 与过去 $\{X(v)|0 \leq v < t\}$ 独立.

(3) K-C 方程：对任意 $t, s \geq 0$，有

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) p_{kj}(s) \text{ 或} P(t+s) = P(t)P(s),$$

其中

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in I}$$

称为马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵.

推论 1.2

对于转移概率矩阵 $P(t)$ 和 $\epsilon > 0$，我们有 $\{P(t) : t \in (0, \epsilon]\}$ 可以决定所有的 $P(t)$.

证明.

对任意 $t > 0$，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $t/n \in (0, \epsilon]$，而 $P(t) = P(t/n)^n$. $\square$

(4) 马氏链的有限维分布由转移概率 (1.1) 和初始分布

$$p_i = P(X(0) = i),\ i \in I$$

唯一决定，且对 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，有

$$\begin{aligned} &P(X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \cdots, X(t_n) = i_n | X(0) = i) \\ =&p_{ii_1}(t_1)p_{i_1i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

特别当 $t_{j+1} - t_j = a$ 时，有

$$P(X(a) = i, X(2a) = i, \cdots, X(na) = i | X(0) = i) = [p_{ii}(a)]^n.$$

(5) $X(t)$ 的概率分布由转移概率矩阵和 $X(0)$ 的概率分布

$$\boldsymbol{p}(0) = [p_1(0), p_2(0), \cdots]$$

唯一决定，

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)P(t),$$

其中 $\boldsymbol{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \cdots]$, $t \geq 0$, $p_i(t) = P(X(t) = i)$, $i \in I$.

(6) 对于 $s, t \geq 0$，有

$$p_{jj}(s + t) \geq p_{jj}(s)p_{jj}(t),\ p_{jj}(t) \geq [p_{jj}(\frac{t}{n})]^n.$$

定义

泊松过程是马氏链

转移速率矩阵

泊松过程具有独立增量性和平稳增量性，状态空间 $I=\{0,1,\cdots\}$. 设 λ 是泊松过程 $\{N(t)\}$ 的强度，$t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}$，利用独立增量性和平稳增量性得到

$$
\begin{aligned}
&P(N(t_{n+1})=j|N(t_n)=i,N(t_{n-1})=i_{n-1},\cdots,N(t_0)=i_0)\\
=&P(N(t_{n+1})-N(t_n)=j-i|N(t_n)=i,\cdots,N(t_0)=i_0)\\
=&P(N(t_{n+1})-N(t_n)=j-i)=P(N(t_{n+1}-t_n)=j-i).
\end{aligned}
$$

上式只与 $i,j,t_{n+1}-t_n$ 有关，于是知道 $\{N(t)\}$ 是马氏链，有初始分布 $P(N(0)=0)=1$ 和转移概率

$$
p_{ij}(t)=P(N(t)=j-i)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t} & \text{当 } j\geq i,\\ 0, & \text{当 } j<i,\end{cases}
$$

其中

$$
p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}
$$

命题 2.1

取整数值的随机过程 $\{X(t)|t \geq 0\}$, 如果具有独立增量性和平稳增量性就一定是马氏链.

容易看出 $p_{ij}(t)$ 是连续函数，在 $t=0$ 处有右导数

$$q_{ij} \equiv p'_{ij}(0) = \begin{cases} -\lambda, & j=i, \\ \lambda, & j=i+1, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

由于泊松过程在 i 的停留时间服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$，所以其数学期望 λ^{-1} 是质点在 i 的平均停留时间. λ 越大，泊松过程由 i 向 $i+1$ 转移得越快. 于是称 λ 为 i 的转移速率和转移强度. 这样 $p'_{i,i+1}(0)=q_{i,i+1}=\lambda$ 表明质点从 i 出发，下一步向 $i+1$ 转移的速率是 λ. 对于 $j\neq i$ 和 $i+1$，$p'_{ij}(0)=q_{ij}=0$ 表明质点从 i 出发，下一步向 j 转移的速率是 0，也就是说不会由 i 转向 j. 称 $p'_{ii}(0)=-\lambda$ 为质点停留在 i 的速率.

引入矩阵

$$Q=(q_{ij})_{i,j\in I}=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

人们称 Q 为泊松过程 $\{N(t)\}$ 的转移速率矩阵 或 转移强度矩阵，或简单地称为 Q 矩阵. 可以把转移速率矩阵写成若当矩阵的形式

$$Q=(-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

用归纳法容易验证

$$Q^k = (-\lambda)^k \begin{pmatrix} C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & C_k^2(-1)^2 & C_k^3(-1)^3 & \cdots \\ 0 & C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & C_k^2(-1)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & C_k^0 & C_k^1(-1)^1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中对于 $j < 0$ 或 $j > k$，规定 $C_k^j = 0$. 定义

$$q_{ij}^{(k)} = (-\lambda)^k C_k^{j-i}(-1)^{i-j},\ k \geq 1,\ i, j \in I,$$

利用 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$，我们有

$$Q^k=(q_{ij}^{(k)}),\ Q^0=\text{单位矩阵},$$

并且对于 $j\geq i$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}q_{ij}^{(k)}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda^{j-i}C_k^{j-i}(-\lambda)^{k+i-j}\\&=\sum_{k=j-i}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)![k-(j-i)]!}(-\lambda t)^{k-(j-i)}\\&=\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}\\&=p_{ij}(t).\end{aligned}$$

写成矩阵的形式就得到

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(q_{ij}^{(k)})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tQ)^k.$$

形式上也可以把上式写成指数函数

$$P(t)=e^{tQ}.$$

注意对上面两式求导数我们就得到 $P'(0)=Q$.

定义

泊松过程是马氏链

转移速率矩阵

离散时间马氏链的一步转移概率矩阵 P 可以唯一决定 n 步转移概率矩阵：$P^{(n)} = P^n$. 对于连续时间马氏链的转移概率矩阵 $P(t)$，没有最小的正数 t 使得类似的公式成立. 但是对任何 $\varepsilon > 0$，从推论 ?? 知道 $\{P(s); 0 < s \leqslant \varepsilon\}$ 可以决定所有的 $P(t)$，于是 $\{(P(s) - P(0))/s; s \in (0, \varepsilon]\}$ 也可以决定所有的 $P(t)$. 这就提示我们，$P(t)$ 可能被 $P'(0) = \lim_{s \downarrow 0}(P(s) - P(0))/s$ 唯一决定. 为讨论这个问题，先研究 $P'(0)$ 的存在性.
对于泊松过程 $\{N(t)\}$，有

$$P(N(s, t+s] < \infty) = 1, \ \ s, t \geq 0.$$

这说明在概率 1 的意义下，泊松过程在任何有限的时间内只有有限次转移，因为在转移点事件已经发生，所以轨迹是右连续的.
对于一般的连续时间马尔科夫链，我们称其为**规则马氏链**，如果在概率 1 意义下，有限时间内只能转移有限次.

规则马氏链 $\{X(t)\}$ 的轨迹是阶梯函数. 因为在跳跃点质点已经到达新的状态，所以规则马氏链的轨迹也是右连续的，即对 $t \geq 0$，

$$\lim_{h \downarrow 0} P(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon) = 0.$$

此后无特殊声明，马氏链都是规则马氏链.

用 $P_i(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot|X(0) = i)$，于是我们得到对于任何 $\epsilon > 0$，

$$\lim_{h \downarrow 0} X(t+h) = X(h) \ a.s.$$

于是 $X(t+h)$ 依概率收敛到 $X(t)$，即对任何 $\varepsilon > 0$，$t \geq 0$，

$$\lim_{h \downarrow 0} P_i(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon) \leq \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon)}{P(X(0) = i)} = 0, \ i \in I.$$

引理 3.1

设 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续和非负，满足 $g(0)=0$，$g(t+s)\le g(t)+g(s)$，$s,t\ge 0$，则存在极限

$$q=\lim_{t\downarrow 0}\frac{g(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{g(t)}{t}\in[0,\infty].$$

证明.

对于 $0 < h < t$，有正整数 n 和 $s \in (0, h)$ 使得 $t = nh + s$. 由

$$g(t)/t \leq ng(h)/t + g(s)/t = (g(h)/h)(nh/t) + g(s)/t$$

知道当 $h \to 0$ 时，$g(t)/t \leq \liminf_{h \downarrow 0} g(h)/h$. 这就得到

$$\limsup_{h \downarrow 0} g(t)/t \leq \sup_{t > 0} g(t)/t \leq \liminf_{h \downarrow 0} g(h)/h. \qquad \square$$

定理 3.2

对于状态空间为 I 的马氏链 $\{X(t)\}$，有以下结论：

(1) $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 连续：$\lim_{t\downarrow 0} p_{ij}(t) = p_{ij}(0)$;

(2) 我们有

$$\sum_{j\in I} |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \leq 2(1-p_{ii}(h)),$$

从而 $p_{ij}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续;

(3) 对于 $t \geq 0$，恒有 $p_{ii}(t) > 0$;

(4) $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 有右导数

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} = q_{ij},$$

其中 $-\infty \leq q_{ii} \leq 0$，当 $i \neq j$ 时，$q_{ij} \geq 0$;

(5) 对于 $i \in I$，有

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} \leq |q_{ii}|.$$

证明.

(1) 对于 $\epsilon \in (0,1)$，利用 $p_{ii}(0)=1$ 得到 $t\downarrow 0$ 时，

$$|p_{ii}(0)-p_{ii}(t)| = 1-P_i(X(t)=i) = P_i(X(t)\neq i) = P_i(|X(t)=X(0)|\geq\epsilon)\to 0.$$

对于 $j\neq i$，利用 $p_{ij}(t)+p_{ii}(t)\leq 1$ 知道 $t\downarrow 0$ 时，$0\leq p_{ij}(t)\leq 1-p_{ii}(t)\to 0$.

(2) 利用 $p_{ij}(t)\leq 1$ 和 K-C 方程我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)| &= \sum_{j\in I}\Big|\sum_{k\neq i}(p_{ik}(h)p_{kj}(t)+(1-p_{ii}(h))\sum_{j\in I}p_{ij}(t))\Big| \\ &\leq \sum_{k\neq i}\sum_{j\in I}p_{ik}p_{kj}(t)+(1-p_{ii}(h))\sum_{j\in I}p_{ij}(t) \\ &= \sum_{k\neq i}p_{ik}(h)+1-p_{ii}(h) \\ &= 2(1-p_{ii}(h)).\end{aligned}$$

(3) 由 (1) 知道当 n 充分大时 $p_{ii}(t/n)>0$，于是

$$p_{ii}(t)=\left[p_{ii}(\frac{t}{n})\right]^n>0.$$

证明.

(4) 先考虑 $i=j$ 的情形. 定义 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数 $g(t)=-\ln p_{ii}(t)$, 有 $g(0)=0$ 和

$$g(t+s)=-\ln p_{ii}(t+s)\le -\ln(p_{ii}(t)p_{ii}(s))=g(t)+g(s).$$

由引理 3.1，我们知存在 $q_i\in[0,\infty]$ 使得

$$q_i:=\sup_{t>0}\frac{g(t)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{g(t)}{t}, \tag{3.1}$$

注意到当 $t\downarrow 0$ 时，$g(t)\to 0$，我们有

$$\frac{p_{ii}(t)-1}{t}=\frac{e^{-g(t)}-1}{t}=\frac{g(t)}{t}\frac{e^{-g(t)}-1}{g(t)}\to -q_i.$$

取 $q_{ii}=-q_i$ 就得到结论.

证明.

(5) 对于任何正整数 m，利用

$$\sum_{j\neq i, j\leq m} q_{ij} = \lim_{t\downarrow 0} \sum_{j\neq i, j\leq m} \frac{p_{ij}(t)}{t}$$
$$\leq \lim_{t\downarrow 0} \sum_{j\neq i} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii},$$

从而得证. $\square$

推论 3.3

定义 $q_i = -q_{ii}$.

(1) 如果 $q_i = 0$，则对所有的 $t \geq 0$，$p_{ii}(t) = 1$；

(2) $q_i = \sup_{t>0}(1 - p_{ii}(t))/t$.

证明.

(1) 由 (3.1) 我们有

$$\sup_{t>0} \frac{g(t)}{t} = \sup_{t>0} \frac{-\ln p_{ii}(t)}{t} = q_i = 0,$$

所以 $p_{ii}(t) = 1$ 对一切 $t \geq 0$ 成立.

(2) 由 (3.1) 我们有 $g(t)/t \leq q_i$，所以有

$$p_{ii}(t) = \exp\left(-\frac{g(t)}{t}t\right) \geq e^{-q_i t}.$$

因为 $t \geq 0$，所以有不等式 $1 - e^{-q_i t} \leq q_i t$ 我们有

$$\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \leq \frac{1 - e^{-q_i t}}{t} \leq q_i.$$

再结合 $p'_{ii}(0) = -q_i$ 就得到结论 (2). □

由于 $p_{ij}(t)$ 是马氏链从 i 出发，t 时处于 j 的概率，所以称 $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ 是质点从 i 出发，下一步向 j 转移的概率或强度，称

$$Q = (q_{ij})_{i,j \in I}$$

为马氏链的转移速率矩阵或转移强度矩阵.

由于 q_{ij} 是转移概率 $p_{ij}(t)$ 在 $t = 0$ 的导数，所以又称 Q 为马氏链的无穷小矩阵，或简单地称为 Q 矩阵.