第 24 讲 连续时间马氏链的结构

转移速率矩阵

保守马氏链

马氏链的结构

对于泊松过程 $\{N(t)\}$，有

$$P(N(s,t+s] < \infty) = 1, \ \ s,t \geq 0.$$

这说明在概率 1 的意义下，泊松过程在任何有限的时间内只有有限次转移，因为在转移点事件已经发生，所以轨迹是右连续的.
对于一般的连续时间马尔科夫链，我们称其为**规则马氏链**，如果在概率 1 意义下，有限时间内只能转移有限次.

规则马氏链 $\{X(t)\}$ 的轨迹是阶梯函数. 因为在跳跃点质点已经到达新的状态，所以规则马氏链的轨迹也是右连续的，即对 $t \geq 0$，

$$\lim_{h\downarrow 0} P(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon) = 0.$$

此后无特殊声明，马氏链都是规则马氏链.
用 $P_i(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot|X(0)=i)$，于是我们得到对于任何 $\epsilon > 0$，

$$\lim_{h\downarrow 0} X(t+h) = X(h) \ a.s.$$

于是 $X(t+h)$ 依概率收敛到 $X(t)$，即对任何 $\varepsilon > 0$，$t \geq 0$，

$$\lim_{h\downarrow 0} P_i(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon) \leq \lim_{h\downarrow 0} \frac{P(|X(t+h) - X(t)| \geq \epsilon)}{P(X(0)=i)} = 0, \ i \in I.$$

引理 1.1

设 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续和非负，满足 $g(0)=0$，$g(t+s)\le g(t)+g(s)$，$s,t\ge 0$，则存在极限

$$q=\lim_{t\downarrow 0}\frac{g(t)}{t}=\sup_{t>0}\frac{g(t)}{t}\in[0,\infty].$$

证明.
对于 $0 < h < t$，有正整数 n 和 $s \in (0, h)$ 使得 $t = nh + s$. 由

$$g(t)/t \leq ng(h)/t + g(s)/t = (g(h)/h)(nh/t) + g(s)/t$$

知道当 $h \to 0$ 时，$g(t)/t \leq \liminf_{h \downarrow 0} g(h)/h$. 这就得到

$$\limsup_{h \downarrow 0} g(t)/t \leq \sup_{t>0} g(t)/t \leq \liminf_{h \downarrow 0} g(h)/h. \qquad \square$$

定理 1.2

对于状态空间为 I 的马氏链 $\{X(t)\}$，有以下结论：

(1) $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 连续：$\lim_{t\downarrow 0} p_{ij}(t) = p_{ij}(0)$；

(2) 我们有

$$\sum_{j\in I} |p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)| \le 2(1-p_{ii}(h)),$$

从而 $p_{ij}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续；

(3) 对于 $t \ge 0$，恒有 $p_{ii}(t) > 0$；

(4) $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 有右导数

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} = q_{ij},$$

其中 $-\infty \le q_{ii} \le 0$，当 $i \ne j$ 时，$q_{ij} \ge 0$；

(5) 对于 $i \in I$，有

$$\sum_{j\ne i} q_{ij} \le |q_{ii}|.$$

证明.

(1) 对于 $\epsilon \in (0,1)$，利用 $p_{ii}(0)=1$ 得到 $t \downarrow 0$ 时，

$$|p_{ii}(0)-p_{ii}(t)| = 1-P_i(X(t)=i) = P_i(X(t)\neq i) = P_i(|X(t)=X(0)| \geq \epsilon) \to 0.$$

对于 $j \neq i$，利用 $p_{ij}(t)+p_{ii}(t) \leq 1$ 知道 $t \downarrow 0$ 时，$0 \leq p_{ij}(t) \leq 1-p_{ii}(t) \to 0$.

(2) 利用 $p_{ij}(t) \leq 1$ 和 K-C 方程我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} |p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)| &= \sum_{j\in I} \Big| \sum_{k\neq i} (p_{ik}(h)p_{kj}(t) + (1-p_{ii}(h)) \sum_{j\in I} p_{ij}(t)) \Big| \\
&\leq \sum_{k\neq i}\sum_{j\in I} p_{ik}p_{kj}(t) + (1-p_{ii}(h)) \sum_{j\in I} p_{ij}(t) \\
&= \sum_{k\neq i} p_{ik}(h) + 1 - p_{ii}(h) \\
&= 2(1-p_{ii}(h)).
\end{aligned}$$

(3) 由 (1) 知道当 n 充分大时 $p_{ii}(t/n)>0$，于是

$$p_{ii}(t) = \left[p_{ii}(\frac{t}{n})\right]^n > 0.$$

证明.

(4) 先考虑 $i=j$ 的情形. 定义 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数 $g(t)=-\ln p_{ii}(t)$, 有 $g(0)=0$ 和

$$g(t+s)=-\ln p_{ii}(t+s)\le-\ln(p_{ii}(t)p_{ii}(s))=g(t)+g(s).$$

由引理 1.1，我们知存在 $q_i\in[0,\infty]$ 使得

$$q_i:=\sup_{t>0}\frac{g(t)}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{g(t)}{t}, \tag{1.1}$$

注意到当 $t\downarrow 0$ 时，$g(t)\to 0$，我们有

$$\frac{p_{ii}(t)-1}{t}=\frac{e^{-g(t)}-1}{t}=\frac{g(t)}{t}\frac{e^{-g(t)}-1}{g(t)}\to -q_i.$$

取 $q_{ii}=-q_i$ 就得到结论.

证明.

(5) 对于任何正整数 m，利用

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i, j\leq m} q_{ij} &= \lim_{t\downarrow 0}\sum_{j\neq i, j\leq m}\frac{p_{ij}(t)}{t}\\ &\leq \lim_{t\downarrow 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t} = -q_{ii},\end{aligned}$$

从而得证. □

推论 1.3

定义 $q_i = -q_{ii}$.

(1) 如果 $q_i = 0$，则对所有的 $t \geq 0$，$p_{ii}(t) = 1$;

(2) $q_i = \sup_{t>0}(1 - p_{ii}(t))/t$.

证明.

(1) 由 (1.1) 我们有

$$\sup_{t>0} \frac{g(t)}{t} = \sup_{t>0} \frac{-\ln p_{ii}(t)}{t} = q_i = 0,$$

所以 $p_{ii}(t) = 1$ 对一切 $t \geq 0$ 成立.

(2) 由 (1.1) 我们有 $g(t)/t \leq q_i$，所以有

$$p_{ii}(t) = \exp\big(-\frac{g(t)}{t}t\big) \geq e^{-q_i t}.$$

因为 $t \geq 0$，所以有不等式 $1 - e^{-q_i t} \leq q_i t$ 我们有

$$\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \leq \frac{1 - e^{-q_i t}}{t} \leq q_i.$$

再结合 $p'_{ii}(0) = -q_i$ 就得到结论 (2). □

由于 $p_{ij}(t)$ 是马氏链从 i 出发，t 时处于 j 的概率，所以称 $q_{ij}=p'_{ij}(0)$ 是质点从 i 出发，下一步向 j 转移的概率或强度，称

$$Q=(q_{ij})_{i,j\in I}$$

为马氏链的转移速率矩阵或转移强度矩阵.

由于 q_{ij} 是转移概率 $p_{ij}(t)$ 在 $t=0$ 的导数，所以又称 Q 为马氏链的无穷小矩阵，或简单地称为 Q 矩阵.

定义 2.1

如果对于一切 $i \in I$，有

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = |q_{ii}| < \infty,$$

则称转移速率矩阵 Q 或马氏链是 **保守的**.

因为 $q_{ii} = p'_{ii}(0) \le 0$，所以当所有的 $|q_{ii}| < \infty$ 时，保守性等价于

$$\sum_{j\in I} q_{ij} = 0,\ i \in I.$$

如果将 q_{ii} 视为马氏链从 i 出发，下一步继续留在 i 的速率，将 $\sum_{j\neq i} q_{ij}$ 视为从 i 出发，下一步离开 i 的速率，保守性说明继续停留的速率和转出的速率大小相等，方向相反.

如果 $q_{ii}=0$，由推论 1.3 我们知对一切 $t>0$，

$$p_{ii}(t)=P(X(t)=i|X(0)=i)=1.$$

这说明 i 是吸引状态：质点一旦到达状态 i 就不再离开. 已知 $X(0)=i$ 时，用

$$\tau=\inf\{t|X(t)\neq i\}$$

表示质点在 i 的停留时间，则从 $q_{ii}=0$ 得到 $P_i(\tau=\infty)=1$.

命题 2.2

对于马氏链 $\{X(t)\}$, $q_i = |q_{ii}|$ 和 $t, h > 0$，有以下结论：

(1) $P(X(t+h) = j | X(u) = i, u \in [0, t]) = p_{ij}(h)$;

(2) $P(X(u) = i, u \in [0, t] | X(0) = i) = e^{-q_i t}$.

证明.

(1) 已知 $X(t)=i$ 的条件下，$X(t+h)$ 和 $\{X(u), u\in[0,t)\}$ 独立，于是有

$$
\begin{aligned}
&P(X(t+h)=j|X(u)=i, u\in[0,t]) \\
=&P(X(t+h)=j|X(t)=i, X(u)=i, u\in[0,t)) \\
=&P(X(t+h)=j|X(t)=i) \\
=&p_{ij}(h).
\end{aligned}
$$

证明.

(2) $q_i = 0$ 是结论显然成立. 只需对 q_i 是正数的情况证明. 集合列 $B_n = \{jt/2^n | 1 \le j \le 2^n\}$ 单调增加. 事件列 $A_n = \{X(jt/2^n) = i, 1 \le j \le 2^n\} = \{X(u) = i, u \in B_n\}$ 单调减小: $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. 因为 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 在 $[0, t]$ 中稠密，$X(t)$ 的轨迹又是阶梯形状和右连续的，所以

$$\{X(u) = i, u \in [0, t]\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n \ a.s..$$

利用概率的连续性我们有

$$\begin{aligned} P(X(u) = i, u \in [0,t] | X(0) = i) &= \lim_{n\to\infty} P(A_n | X(0) = i) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(X(jt/2^n), 1 \le j \le 2^n | X(0) = i) \\ &= \lim_{n\to\infty} [p_{ii}(t/2^n)]^{2^n} = \lim_{n\to\infty} [p_{ii}(t/n)]^n \\ &= \lim_{n\to\infty} [p_i i(0) + p'_{ii}(0)(t/n) + o(t/n)]^n \\ &= \lim_{n\to\infty} [1 - q_i t/n + o(t/n)]^n \\ &= e^{-q_i t}. \end{aligned}$$

□

回忆我们已经规定 $1/0=\infty$，$0/0=0$.

定理 2.3

对于连续时间马氏链 $\{X(t)\}$，$q_i=|q_{ii}|$，用 τ 表示质点在状态 i 的停留时间，则有

(1) $P(\tau>t|X(0)=i)=e^{-q_i t}$，$t\geq 0$;

(2) $E[\tau|X(0)=i]=1/q_i$;

(3) 当 $j\neq i$ 时，$P(X(\tau)=j,\tau\leq t|X(0)=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}(1-e^{-q_i t})$;

(4) 当 $j\neq i$ 时，$P(X(\tau)=j|X(0)=i)=\frac{q_{ij}}{q_i}$;

(5) 在条件 $X(0)=i$ 下，τ 和 $X(\tau)$ 独立;

(6) 当所有的 $q_i<\infty$ 时，马氏链 $\{X(t)\}$ 是保守的.

证明.

只需对 q_i 是整数的情况证明.

(1) 由命题 2.2 (2) 我们有:

$$P(\tau > t|X(0) = i) = P(X(u) = i, u \in [0, t]|X(0) = i) = e^{-q_i t}.$$

(2) 结论 (1) 说明在条件 $X(0) = i$ 下，$\tau \sim \mathcal{E}(q_i)$，所以有

$$E(\tau|X(0) = i) = 1/q_i.$$

证明.

(3) 为了计算联合概率 $P(X(\tau)=j,\tau\le t\mid X(0)=i)$，我们对质点在状态 i 的停留时间 τ 展开积分（即对 τ 的取值进行条件分解）。考虑在时间区间 $(s,s+ds]$ 内离开状态 i 且转移到状态 j 的概率。根据马尔可夫性和转移速率的定义，这要求：质点在时间区间 $[0,s]$ 内一直保持在状态 i（概率为 $P(\tau>s\mid X(0)=i)=e^{-q_is}$）；在随后的极短时间无穷小量 ds 内，质点由状态 i 转移到了状态 j（概率为 $q_{ij}ds+o(ds)$）。因此，利用全概率公式，我们可以将 $\tau\le t$ 范围内的所有微元贡献进行积分：

$$P(X(\tau)=j,\tau\le t\mid X(0)=i)=\int_0^t P(\tau\in(s,s+ds],X(s+ds)=j\mid X(0)=i)$$

将上述两层条件概率代入：

$$\begin{aligned}P(X(\tau)=j,\tau\le t\mid X(0)=i)&=\int_0^t P(\tau>s\mid X(0)=i)\cdot\lim_{u\to0^+}\frac{P(X(s+u)=j\mid X(s)=i)}{du}\,ds\\&=\int_0^t e^{-q_is}\cdot q_{ij}\,ds\end{aligned}$$

证明.

由于 q_{ij} 与积分变量 s 无关，将其提取到积分符号外部：

$$= q_{ij} \int_0^t e^{-q_i s}\, ds$$

直接计算该一元定积分：

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-q_i s}\, ds &= \left[-\frac{1}{q_i} e^{-q_i s}\right]_0^t \\
&= -\frac{1}{q_i} e^{-q_i t} - \left(-\frac{1}{q_i} e^0\right) \\
&= \frac{1}{q_i}(1 - e^{-q_i t})
\end{aligned}$$

将积分结果代回原式，即可得到：

$$P(X(\tau) = j, \tau \le t \mid X(0) = i) = \frac{q_{ij}}{q_i}(1 - e^{-q_i t}),$$

证明.

(4) 在 (3) 中让 $t \to \infty$ 可得.

(5) 这时 $p_j = q_{ij}/q_i$ 是 $X(\tau)|X(0)=i$ 的概率分布. 由 (1) 知道 $P_i(\tau \le t) = 1 - e^{-q_i t}$. 引入 $P_i(\cdot) = P(\cdot|X(0)=i)$，用 (3) 和 (4) 得到

$$P_i(X(\tau)=j, \tau \le t) = P_i(X(\tau)=j)P_i(\tau \le t), \ t \ge 0.$$

(6) 当 $q_i = 0$ 时，我们知 $\sum_{j\in I} q_{ij} = 0$. 当 $q_i > 0$ 时，由 (1) 和 (4) 知 $\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i$. □

由上面定理，我们知当 $q_i = \infty$ 时，有 $\overline{G}(t) = P(\tau > t|X(0)=i) = \equiv 0$，于是 $P(\tau = 0|X(0)=i) = 1$. 这说明质点在状态 i 无法停留，所以称 i 为瞬时状态. 我们后面只考虑所有状态均非瞬时状态的情形：$q_i = |q_{ii}| < \infty$.

如果 $q_i > 0$, 由定理 **??**(1) 我们知道, 质点从 i 出发, 在 i 的停留时间 T_0 (下标 0 表示第 0 次转移) 服从指数分布 $\mathcal{E}(q_i)$, 有数学期望 $1/q_i$. q_i 越大, 平均停留时间越短. 由定理 **??**(4) 知道停留结束后, 质点以概率 q_{ij}/q_i 转移到状态 j $(j \neq i)$. 因为轨迹是右连续的, 所以如果转移到 j, 则 $X(T_0) = j$. 马氏链的时间齐次性和马氏性还保持了以下性质:
已知 $X(T_0) = j$ 时,

1. 在 T_0 以后马氏链的运动情况与 T_0 以前的行为独立;
2. 如果把 T_0 标记为重新开始时间 0，则得到从 j 出发的马氏链，且转移概率矩阵不变;
3. 如果 j 不是吸引状态，马氏链在 j 的停留时间 T_1 服从指数分布 $\mathcal{E}(q_j)$，有数学期望 $1/q_j$. 停留结束后，以概率 q_{jk}/q_j 转移到状态 $k(k \neq j)$，T_1 和 T_0 独立. 若转向 k，则有 $X(T_0 + T_1) = k$;
4. 已知 $X(T_0 + T_1) = k$ 时，在 $T_0 + T_1$ 以后马氏链的运动情况与 $T_0 + T_1$ 以前的行为独立，如果把 $T_0 + T_1$ 标记为重新开始时间 0，则得到从 k 出发的马氏链，且转移概率矩阵不变;
5. 马氏链按照以上方式继续运行.

转移速率矩阵

保守马氏链

马氏链的结构

设马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移速率矩阵 Q, $q_i = |q_{ii}|$. 定义

$$k_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i, & \text{当 } q_i > 0,\ j \neq i \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } q_i > 0,\ j = i \text{ 时}, \\ \delta_{ij}, & \text{当 } q_i = 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $K = (k_{ij})$ 的各行之和为 1. 定义

$$\begin{aligned} &\tau_0 = 0 \\ &\tau_1 = \inf\{t > 0 | X(t) \neq X(0)\}, \\ &\tau_2 = \inf\{t > \tau_1 | X(t) \neq X(\tau_1)\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} | X(t) \neq X(\tau_{n-1})\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

则 τ_i 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的第 i 次转移时刻. $T_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ 是第 i 次转移后的停留时间.

我们有下面的结果:

(1) $X_n = X(\tau_n)(n = 0, 1, \cdots)$ 是以 $K = (k_{ij})$ 为一步转移概率矩阵的离散时间马氏链;

(2) 沿着嵌入链 $\{X(\tau_n)\}$ 的给定轨迹 $i_0 \to i_1 \to i_2 \to \cdots$, 马氏链各状态的依次停留时间 $T_0, T_1, \cdots$ 相互独立, T_j 服从指数分布 $\mathcal{E}(q_{i_j})$, $j = 0, 1, 2, \cdots$;

(3) 设 $\{Y_n\}$ 是离散时间马氏链, 以前面定义的 $K = (k_{ij})$ 为转移概率矩阵. 对每个 $i \in I$, 假设质点每次到达 i 后, 在 i 的停留时间是相互独立的随机变量, 服从共同的指数分布 $\mathcal{E}(q_i)$, 停留结束时以概率 k_{ij} 转移到状态 j $(j \neq i)$. 进一步假设质点在不同状态的停留时间相互独立, 则用 $X(t)$ 表示 t 时质点的状态时, $X(t)$ 是连续时间的马氏链, 有转移速率矩阵 Q.

在上面 (1) 中, 称离散时间马氏链 $\{X_n\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的嵌入链或跳跃链. 同理上面的 (3) 中也称离散时间马氏链 $\{Y_n\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的嵌入链.

例 3.1

强度为 λ 的泊松过程是马氏链，嵌入链有一步转移概率

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1 \geq 1, \\ 0, & j \neq i+1. \end{cases}$$

质点在任何状态的停留时间是相互独立的，服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$，所以 $q_i = \lambda$. 于是

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & j = i \geq 0, \\ \lambda, & j = i+1 \geq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 3.2

设连续时间马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移概率矩阵

$$P(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+3e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 2-2e^{-3t} \\ 2-2e^{-3t} & 1+4e^{-3t} & 2-2e^{-3t} \\ 2-2e^{-3t} & 1-e^{-3t} & 2+3e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

(1) 计算转移速率矩阵 Q;

(2) 计算质点在个状态的平均停留时间;

(3) 计算嵌入链的一步转移概率矩阵;

(4) 对于马氏链的运动情况给予简单解释.

证明.

(1) 容易计算出

$$Q = P'(0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 6 & -12 & 6 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

(2) 设马氏链的状态为 1，2，3，质点在 1，2，3 的平均停留时间分别是

$$1/q_1 = 5/9,\ 1/q_2 = 5/12,\ 1/q_3 = 5/9.$$

(3) 根据 $k_{ij} = q_{ij}/q_i\ (j \neq i)$，可以计算出嵌入链的一步转移矩阵

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 3/9 & 6/9 \\ 6/12 & 0 & 6/12 \\ 6/9 & 3/9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 质点按照离散马氏链的一部转移概率矩阵 K 在状态 1，2，3 中转移，这三个状态互通. 质点每次到达状态 i，在 i 的停留时间是服从指数分布的随机变量，其数学期望 $1/q_i$ 是在 i 的平均停留时间. 所有不同次到达的停留时间是相互独立的，在不同状态的停留时间也是相互独立的. 质点从 i 出发的条件下，t 时处于状态 j 的概率是 $p_{ij}(t)$. □