第 26 讲 生灭过程

生灭过程

对于任意 $t \geq 0$，若已知 t 时存活的生物个体在 $(t, t+h]$ 内发生分裂的概率是 $\lambda h + o(h)$，则这个生物的寿命 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$. 实际上，引入生存函数 $\overline{F}(t) = P(T > t)$，根据题意得到

$$
\begin{aligned}
P(t < T \leq t+h | T > t) &= \frac{P(t < T \leq t+h)}{P(T > t)} \\
&= \frac{\overline{F}(t) - \overline{F}(t+h)}{\overline{F}(t)} = \lambda h + o(h).
\end{aligned}
$$

将上式的 t 换成 $t-h$，得到

$$
\frac{\overline{F}(t-h) - \overline{F}(t)}{\overline{F}(t-h)} = \lambda h + o(h), \ t > 0.
$$

对上面两公式的左右两边同时除以 h，再令 $h \downarrow 0$，得到

$$
\frac{d}{dt} \ln \overline{F}(t) = \frac{\overline{F}'(t)}{\overline{F}(t)} = -\lambda.
$$

积分后得到 $\ln \overline{F}(t) = -\lambda t$. 于是 $\overline{F}(t) = e^{-\lambda t}$ 成立. 这说明 $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

对于任意 $t \geq 0$，如果 t 时有 m 个生物，第 i 个生物在 $(t, t+h]$ 内分裂的概率是 $\lambda_i h + o(h)$，用 T_i 表示从 t 开始等待第 i 个生物分裂的时间，我们有 $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$，$T_1, T_2, \cdots, T_m$ 相互独立. 我们知从 t 开始等待第一个分裂的时间 $T = \min(T_1, T_2, \cdots, T_m) \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)$.

例 1.1

一个 t 时存活的生物个体在 $(t, t+h]$ 内分裂情况与其在 t 时的年龄无关，且满足：当 $h \to 0$ 时，

(1) 在 $(t, t+h]$ 内死亡的概率为 $\mu h + o(h)$；

(2) 在 $(t, t+h]$ 内不死亡也不分裂的概率为 $1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$；

(3) 在 $(t, t+h]$ 内分裂一次成为两个个体的概率为 $\lambda h + o(h)$.

该生物的每个后代也按照相同的方式相互独立地分裂自己的后代. 用 $X(t)$ 表示 t 时生物的总数，称随机过程 $\{X(t)\}$ 为 线性生灭过程，称 μ 为生物个体的死亡强度，λ 为生物个体的出生强度.

首先注意到注意对生物个体而言，除情况 (1)，(2)，(3) 外，在 $(t, t+h]$ 中发生其他分裂情况的概率是 $o(h)$. 从前面的分析和条件 (2) 知道 $\{X(t)\}$ 在状态 i 的停留时间服从参数为 $i(\lambda+\mu)$ 的指数分布.

已知 $X(t)=i$ 时，由指数分布的无记忆性知道这 i 个生物相互独立地分裂自己的后代，并与 t 时各自的年龄无关，从而与时间 t 之前这 i 个生物是如何演变来的无关. 所以 $\{X(t)\}$ 是马氏链，状态空间 $I=\{0,1,\cdots\}$.

对于 $h>0$，一个生物在时间区间 $(t,t+h)$ 内分裂成两次或更多次的概率是 $o(h)$，它等于 1 减去 (1)，(2) 和 (3) 中所列出的所有概率. 于是有

$$
\begin{aligned}
p_{00}(h) &= 1 \text{ (生物不能凭空产生)} \\
p_{10}(h) &= \mu h + o(h), \\
p_{11}(h) &= 1-(\lambda+\mu)h + o(h), \\
p_{12}(h) &= \lambda h + o(h), \\
p_{1j}(h) &= o(h),\ j>2.
\end{aligned}
$$

对于 $i>1$，因为个体们相互独立地分裂自己的后代，所以按二项分布的想法计算出

$$
\begin{aligned}
p_{ii-1}(h) &= C_i^1 p_{10}(h)(p_{11}(h))^{i-1} + o(h) = i\mu h + o(h), \\
p_{ii}(h) &= (p_1 1(h))^i + o(h) = 1 - i(\lambda+\mu)h + o(h). \\
p_{ii+1}(h) &= C_i^1 p_{12}(h)(p_{11}(h))^{i-1} + o(h) = i\lambda h + o(h), \\
p_{ij}(h) &= o(h),\ \text{当 } |j-i|\geq 2.
\end{aligned}
$$

根据 $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ 计算出

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda+\mu) & 3\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

因为 Q 的各行之和为 0，Q 是保守的. 称为线性生灭过程的原因是 $q_i = i(\lambda+\mu)$ 为 i 的线性函数.

$q_{00} = 0$ 说明 0 是吸引状态，故 $k_{00} = 1$. 我们可以算出嵌入链的一步转移矩阵

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \; q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

我们知嵌入链 $\{X_n\}$ 是 $I=\{0,1,2,\cdots\}$ 中的有吸收壁 0 的简单随机游动，质点每次向右移动的概率为 p，向左移动一步的概率是 $q=1-p$. 嵌入链的状态 $\{1,2,\cdots\}$ 是互通的，但不是常返的，说明生物总数或者发展到无穷，或者最终消亡. 生物个体的寿命是来自指数总体 $\epsilon(\lambda+\mu)$ 的随机变量.
对于线性生灭过程 $\{X(t)\}$ 来讲，已知 $X(t)=k$ 时，用 τ_i 表示第 i 个个体的剩余寿命，则需要等待时间

$$T_k=\min\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k\}$$

才能再增加或减少一个个体. 因为 $\tau_1,\tau_2,\cdots{}_k$ 相互独立，都服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda+\mu)$，所以 $T_k\sim\mathcal{E}(k(\lambda+\mu))$. 数学期望 $E[T_k]=1/[k(\lambda+\mu)]$ 为马氏链在状态 k 的平均停留时间. k 越大，平均等待时间越短.

对于 $j_0 > 0$ 和嵌入链的轨迹 $j_0 \to j_1 \to j_2 \to \cdots$, $j_i > 0$，因为每次最多增加一个个体，所以有

$$j_i \leq j_0 + i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots .$$

马氏链在 j_i 的平均停留时间

$$E[T_{j_k}] = \frac{1}{j_i(\lambda + \mu)} \geq \frac{1}{(j_0 + i)(\lambda + \mu)}.$$

对于嵌入链的上述轨迹，有

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[T_{j_k}] \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(j_0 + i)(\lambda + \mu)} = \infty.$$

于是我们知要保证线性生灭过程走完上述轨迹，需要无穷长的时间. 所以在任何有限的时间内线性生灭过程不会 “爆炸”，即线性生灭过程是规则的.

进一步的研究还可以得到一下结果：

$$p_{10}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mu - \mu e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}} & \lambda \neq \mu, \\ \dfrac{\lambda t}{1+\lambda t}, & \lambda = \mu. \end{cases}$$

于是得到

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t) = 0 | X(0) = 1) = \begin{cases} \mu/\lambda, & \lambda > \mu, \\ 1, & \lambda \leq \mu. \end{cases}$$

在条件 $X(0)=1$ 下，还可以计算出

$$E[X(t)]=e^{(\lambda-\mu)t},$$

$$\mathrm{Var}(X(t))=\begin{cases}\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}(e^{(\lambda-\mu)t}-1), & \lambda\neq\mu,\\ 2\lambda t, & \lambda=\mu.\end{cases}$$

于是得到

$$\lim_{t\to\infty}E[X(t)]=\begin{cases}0, & \lambda<\mu,\\ 1, & \lambda=\mu,\\ \infty, & \lambda>\mu;\end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Var}(X(t))=\begin{cases}0, & \lambda<\mu,\\ \infty, & \lambda\geq\mu.\end{cases}$$

例 1.2

在生灭过程中，如果 $\mu = 0$，生物就不会死亡，转移速率矩阵就简化成

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

这时的马氏链称为线性纯生过程.

对于线性纯生过程而言，生物的寿命是来自总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量. 每个生物在寿终称两个新的生物，新生物按照上一代的方式再独立地分裂各自的后代. 容易计算出线性纯生过程的嵌入链有一步转移概率

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} j = i = 0 \text{ 或 } j = i + 1 \geq 2 \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对于线性纯生过程，用 T_i 表示已知有 i 个生物的条件下，等待下一次分裂的时间，则 $T_i \sim \mathcal{E}(i\lambda)$，$T_1, T_2, \cdots$ 相互独立. 在条件 $X(0)=1$ 下，引入

$$S_0 = 0,\ S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k,\ k \geq 1.$$

S_k 表示第 k 次分裂的时间. 下面推导公式

$$P(S_k \leq t | X(0) = 1) = (1 - e^{-\lambda t})^k,\ k \geq 1.$$

我们用归纳法. 引入条件概率 $P_1(\cdot) = P(\cdot | X(0) = 1)$. 当 $k=1$ 时，我们有

$$P_1(S_1 \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda t}.$$

设结论对于 $k-1$ 成立，则有

$$
\begin{aligned}
P_1(S_k \le t) &= P(S_{k-1} + T_k \le t) \\
&= \int_0^t P_1(S_{k-1} + s \le t | T_k = s) dP_1(T_k \le s) \\
&= \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-s)})^{k-1} \lambda k e^{-\lambda k s} ds \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j (-1)^j \int_0^t e^{-\lambda j(t-s)} \lambda k e^{-\lambda k s} ds \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j (-1)^j (e^{-\lambda j t} - e^{-\lambda k t}) \\
&= (1 - e^{-\lambda t})^k.
\end{aligned}
$$

于是得证.

这样可以得到线性纯生过程的一步转移概率

$$\begin{aligned}
p_{1j}(t) &= P_1(X(t)=j) = P_1(S_{j-1} \le t < S_j) \\
&= P_1(S_{j-1} \le t) - P_1(S_j \le t) \\
&= (1-e^{-\lambda t})^{j-1} - (1-e^{-\lambda t})^j \\
&= (1-e^{-\lambda t})^{j-1} e^{-\lambda t} \\
&= \beta^{j-1}\alpha,\ j \ge 1,
\end{aligned}$$

其中 $\alpha = e^{-\lambda t}$, $\beta = 1-\alpha$. 于是在条件 $X(0)=1$ 下，对于固定的 $t>0$，$x(t)$ 服从参数为 $\alpha = e^{-\lambda t}$ 的几何分布，有数学期望

$$E[X(t)|X(0)=1] = 1/\alpha = e^{\lambda t}.$$

当一开始有 i 个生物个体时，用 Y_k 表示第 k 个个体在 t 时的后代数，则 Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_i 独立同分布，都服从相同的几何分布

$$P(Y_k = j) = P_{1j}(t) = \beta^{j-1}\alpha,\ j \geq 1.$$

于是 t 时的生物总数 $x(t) = \sum_{k=1}^{i} Y_i$ 服从负二项分布：

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j|X(0) = i) = C_{j-1}^{i-1}\beta^{j-1}\alpha^{i},\ j \geq i \geq 1.$$

在条件 $X(0) = i$ 下，$X(t)$ 有数学期望 $E[X(t)|X(0) = i] = ie^{\lambda t}$.
线性纯生过程又称为 尤尔过程.

例 1.3

设 $\{\lambda_i | i \geq 0\}$，$\{\mu_i | i \geq 1\}$ 是非负数列，满足 $\lambda_i + \mu_i > 0$. 如果马氏链 $\{X(t)\}$ 有状态空间 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 和转移速率矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

则称 $\{X(t)\}$ 是生灭过程，λ_i 为出生率，μ_i 是死亡率. 这时嵌入链 $\{X_n\}$ 有一步转移概率矩阵

$$K = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中 $p_0 = 1 - q_0$,

$$q_0 = \begin{cases} 1, & \lambda_0 = 0, \\ 0, & \lambda_0 > 0, \end{cases} \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i},\ q_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i},\ i \geq 1.$$

嵌入链是非负整数中的随机游动，嵌入链每次向右或向左移动一步.

生灭过程描述如下：已知 t 时有 $i \geq 1$ 个生物时，再等待时间 T_i 后，以概率 p_i 增加一个生物，或以概率 q_i 减少一个生物. 这里 $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i + \mu_i)$.

例 2.1

m 个同种生物中有若干个体带菌，所有个体的行为独立. 在长为 h 的时间中，任何两个个体相遇的概率为 $\lambda h + o(h)$. 不带菌者遇到带菌者即被传染，被传染的个体将永远带菌，并以相同的方式传染其他不带菌的个体. 当 $t = 0$ 时有 i 个带菌者，计算

(1) 在时间 $(0, h]$ 内新增加一个带菌者的概率；

(2) 在时间 $(0, h]$ 内无新增带菌者的概率；

(3) 如果从 $t = 0$ 开始，等待时间 T_i 后新增加一个带菌者，求 T_i 的分布和数学期望；

(4) 如果 $t = 0$ 时只有一个带菌者，平均等待多长时间可以使整个群体带菌?

证明.

用 $P_i(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot|X(0)=i)$.

(1) 对 $k=1,2,\cdots,i, j=1,2,\cdots,m-i$，用 A_{kj} 表示时间 $(0.h]$ 内第 k 个带菌者传染了第 j 个不带菌者. 根据题意，$\{A_{kj}\}$ 相互独立，$P(A_{kj})=\lambda h+o(h)$. $(0,h]$ 内新增加一个带菌者等价于恰有一个 A_{kj} 发生. 因为一共有 $i(m-i)$ 个 A_{kj}，所以

$$
\begin{aligned}
p_{i,i+1}(h) &= P_i(\text{恰有一个 } A_{kj} \text{ 发生}) \\
&= C^1_{i(m-i)} P(A_{11})[1-P(A_{11})]^{i(m-1)-1} \\
&= i(m-1)(\lambda h+o(h))(1-\lambda h+o(h)^{i(m-1)-1} \\
&= i(m-1)\lambda h+o(h).
\end{aligned}
$$

证明.

(2) 根据上面的符号，要计算的概率是

$$
\begin{aligned}
p_{ii}(h) &= P_i(\text{所有 } A_{kj} \text{ 没发生}) \\
&= (1 - P(A_{11}))^{i(m-i)} \\
&= (1 - \lambda h + o(h))^{i(m-i)} \\
&= 1 - i(m-i)\lambda h + o(h).
\end{aligned}
$$

证明.

(3) 用 $X(t)$ 表示 t 时带菌者的总数. 因为带菌者的行为独立，等待传染下一个个体的时间具有无记忆性，所以 $\{X(t)\}$ 是马氏链. 对于 $j \geq i+2$，有

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(h) \leq \sum_{k=i+2}^{m} p_{ik}(h) &= 1 - p_{ii}(h) - p_{i,i+1}(h) \\
&= 1 - [1 - i(m-i)\lambda h + o(h)] - [i(m-i)\lambda h + o(h)] \\
&= o(h).
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
p_{ij}(h) = \begin{cases} 1 - i(m-i)\lambda h + o(h), & j = i, \\ i(m-i)\lambda h + o(h), & j = i+1, \\ o(h), & j \geq i+2. \end{cases}
$$

证明.

于是得到马氏链的转移速率

$$q_{ij} = p'_{ij}(0) = \begin{cases} -i(m-i)\lambda, & j = i, \\ i(m-i)\lambda, & j = i+1 > 1, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

根据马氏链的运动规律知道 T_i 服从参数为 $q_i = |q_{ii}|$ 的指数分布，有数学期望

$$E[T_i] = \frac{1}{q_i} = \frac{1}{i(m-i)\lambda}, \; 1 \le i \le m-1.$$

证明.

(4) 马氏链 $\{X(t)\}$ 是一个状态空间为 $I=\{0,1,\cdots,m\}$ 的纯生过程，从 1 出发到 m 所用的时间为 $T=\sum_{i=1}^{m-1}T_i$，其数学期望是

$$\begin{aligned}
ET &= \sum_{i=1}^{m-1} ET_i \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i(m-i)} \\
&= \frac{1}{m\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{m-i}\right) \\
&= \frac{2}{m\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

对于较大的群体，用近似公式 $\sum_{i=1}^{m-1} i^{-1}\approx \ln(m-1)$，得到 $ET\approx\frac{2\ln(m-1)}{m\lambda}$.
注意，$\dfrac{2\ln(m-1)}{m\lambda}$ 是 m 的减函数，这说明群体越密集，传染速度越快. 另外，容易验证 $q_i=i(m-i)\lambda$ 在 $i=[m/2]$ 大于最大，说明有 $[m/2]$ 个带菌者时的传染速率最大，其中 $[m/2]$ 是 $m/2$ 的整数部分.

生灭过程

引入

线性生灭过程

线性纯生过程

生灭过程

简单的传染病模型

连续时间分支过程

某生物在寿终时以概率 p_k 分裂成 k 个后代, 所有后代也以同样的方式互相独立地分裂自己的后代. 用 ξ 表示一个生物的后代数, 则有

$$p(\xi - k) = p_k, \quad k = 0, 1, \cdots .$$

已知这个生物的后代数不是 1 时, 后代数为 k 的概率是

$$h_k = P(\xi = k | \xi \neq 1) = \begin{cases} 0, & k = 1, \\ \frac{p_k}{1-p_1}, & k \neq 1. \end{cases}$$

这时有 $\sum_{k=0}^{\infty} h_k = 1$.

假定上述生物及其后代的寿命是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量. 每当它分裂成一个新个体, 就称分裂失败, 否则称分裂成功. 失败的概率为 p_1, 成功的概率为 $1-p_1$. 第 1 次分裂失败后的新个体又以概率 p_1 分裂失败以概率 $1-p_1$ 分裂成功, 第 2 次分裂失败后的新个体又以概率 p_1 分裂失败以概率 $1-p_1$ 分裂成功, $\cdots$. 用 N 表示首次分裂成功时的分裂次数, N 服从几何分布,

$$P(N=n)=p_1^{n-1}(1-p_1),\ n\geq 1.$$

用 $T_1,T_2,\cdots$ 分别表示第 1 次, 第 2 次, $\cdots$ 分裂之间的等待间隔, 则 $T_1,T_2,\cdots$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量, 并且和 N 独立. 等待首次分裂成功所用的总时间为

$$T=\sum_{k=1}^{N}T_k.$$

命题 3.1

在上面的符号下, T 服从参数为 $\lambda_1 = (1 - p_1)\lambda$ 的指数分布.

证明.

易见 $T \geqslant 0$ a.s.. 下面说明 T 有无记忆性. 对于 $s>0$，已知 $T>s$ 时，生物在 $[0,s]$ 内没有分裂成功. 根据指数分布的无记忆性，生物需要再等待时间 T_1' 发生分裂，分裂成功的概率仍是 $1-p_1$. 这次分裂失败后的新个体需要等待时间 T_2' 再以概率 $1-p_1$ 分裂成功，...... 用 $T_1', T_2', \ldots$ 表示依次分裂之间的等待间隔，则 $T_1', T_2', \ldots$ 仍是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量，用 N' 表示首次分裂成功时的分裂次数，N' 和 N 同分布. 于是等待首次分裂成功所用的时间

$$T' = \sum_{k=1}^{N'} T_k'$$

和 (无条件 $T>s$ 时的) T 同分布. 上述分析说明

$$P(T>s+t \mid T>s) = P(T'>t) = P(T>t) > 0, \quad s,t>0.$$

于是知道 T 有无记忆性, 从而服从指数分布. 由瓦尔德定理知道 $E[T] = E[N]E[T_1] = 1/[(1-p_1)\lambda]$, 所以 T 服从参数为 $\lambda_1 = (1-p_1)\lambda$ 的指数分布. $\square$

下面对于 $k<0$, 补充定义 $p_k = h_k = 0$.

命题 3.2

在前述生物分裂的模型中，已知 i 个生物中只有一个发生分裂时，则生物数由 i 个变成 j 个的概率为 $k_{ij} = p_{j-i+1}$.

证明.

无论哪个生物发生分裂，数目由 i 增加到 j 时，新分裂出 $j-(i-1)$ 个生物，发生的概率是 p_{j-i+1}. □

命题 3.3

一种生物的寿命是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量，每个生物个体在寿终时以概率 p_k 分裂成 k $(k=0,1,\cdots)$ 个新的同种生物，每个个体的后代也按照相同的方式相互独立地分裂自己的后代．用 $X(t)$ 表示 t 时生物的总数，称随机过程 $\{X(t)\}$ 为连续时间分支过程．对于 $p_0+p_1<1$，

(1) 验证 $\{X(t)\}$ 是保守的马氏链；
(2) 计算 $\{X(t)\}$ 的嵌入链的一步转移概率；
(3) 计算 $\{X(t)\}$ 的转移速率．

证明.

先对 $p_1 = 0$ 的情况解决上述问题. $\{X(t)\}$ 有状态空间 $I = \{0, 1, \cdots\}$. 已知 $X(t) = i$ 时，用 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_i$ 分别表示第 $1, 2, \cdots, i$ 个个体的剩余寿命，根据指数分布的无记忆性知道 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_i$ 是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量. 我们知马氏链在 i 停留时间

$$T = \min\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_i\} \sim \mathcal{E}(i\lambda)$$

后，以概率 $k_{ij} = p_{j-i+1}$ 转向 j，此事与 t 以前的情况独立. 根据马氏链的构造知道 $\{X(t)\}$ 是马氏链，0 是吸引状态，并且有

$$q_i = i\lambda, \quad i \geqslant 0.$$

证明.

于是当 $p_1 = 0$ 时，嵌入链的一步转移概率为

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i = 0, \\ p_{j-i+1}, & j \neq i, i > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

再利用 $q_{ii} = -q_i, q_{ij} = q_i k_{ij}$ $(i \neq j)$ 得到分支过程 $\{X(t)\}$ 的转移速率

$$q_{ij} = \begin{cases} -i\lambda, & j = i, \\ i\lambda p_{j-i+1}, & j \neq i. \end{cases}$$

因为

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij} = -i\lambda + i\lambda \sum_{j \geq i-1} p_{j-i+1} = 0,$$

所以分支过程 $\{X(t)\}$ 是保守的.

证明.

下面是 $p_1 \in (0,1)$ 的情况. 只要把失败的分裂都视为没有分裂, 则可以重新描述连续时间的分支过程如下: 生物的寿命是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda_1)$ 的随机变量, $\lambda_1 = (1-p_1)\lambda$. 每个生物个体在寿终时以概率 $h_k = p_k/(1-p_1)$ 分裂成 k $(k \neq 1)$ 个后代, 每个个体的后代也按照相同的方式相互独立地分裂自己的后代, 则 t 时生物的总数为 $X(t)$. 这时 $h_1 = 0$, $\{X(t)\}$ 是保守的马氏链, $q_i = i\lambda_1 = i(1-p_1)\lambda, i \geq 0$. 其嵌入链 $\{X_n\}$ 有一步转移概率

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i = 0, \\ \frac{p_{j-i+1}}{1-p_1}, & j \neq i, i > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

再由公式 $q_{ij} = q_i k_{ij} = i(1-p_1)\lambda k_{ij}$ $(i \neq j)$ 得到 $\{X(t)\}$ 的转移速率

$$q_{ij} = \begin{cases} -i(1-p_1)\lambda, & j = i, \\ i\lambda p_{j-i+1}, & j \neq i. \end{cases}$$

注意对 $k < 0$ 已规定 $p_k = 0$. $\square$