第 27 讲 连续时间马氏链的结构

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和状态分类

平稳不变分布

定义 1.1

设 I 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的状态空间. $i, j \in I$ 是其中的两个状态.

(1) 如果存在 $t > 0$ 使得 $p_{ij}(t) > 0$，则称 i 通 j，记做 $i \to j$;

(2) 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$，则称 i, j 互通，记做 $i \leftrightarrow j$;

(3) 如果 I 的所有状态互通，则称 马氏链 $\{X(t)\}$ 互通.

命题 1.2

$i \leftrightarrow i$.

命题 1.3

如果 $i \to j$，那么 $j \to i$.

命题 1.4

如果 $i \to j$ 且 $j \to k$，则 $i \to k$.

所以互通关系是一个等价关系. 于是可以把互通的状态放在一起构成等价类.

下面用更新过程的语言来描述马氏链 $\{X(t)\}$。当马氏链从 i 出发，每次到达状态 j 就称一次更新发生。用 T_{ij} 表示第 1 个更新间隔，则 $X(T_{ij})=j$ 是已知的必然事件。用 T_{jj} 表示第 2 个更新间隔，则 $X(T_{ij}+T_{jj})=j$ 是已知的必然事件，$\cdots\cdots$。根据马氏链的结构知道以后的依次更新间隔是独立随机变量，和 T_{jj} 独立同分布。当 $X(t)=j$ 时，称 t 是开状态，就得到一个延迟更新过程，满足

$$p_{ij}(t)=P(X(t)=j\mid X(0)=i)=P(t\text{ 时开}\mid X(0)=i).$$

第 2 个更新间隔中的开状态时间间隔 U_2 是质点在 j 的停留时间，所以服从指数分布 $\mathcal{E}(q_j)$，有数学期望 $\mu_j=1/q_j$。根据马氏链的性质知道 T_{ij},T_{jj} 都不是格点随机变量，所以我们有下面的定理.

定理 1.5

如果 $\{X(t)\}$ 是互通马氏链，记 $\mu_j = 1/q_j$，则有

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{\mu_j}{E[T_{jj}]},$$

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \frac{[0,t] \text{ 内马氏链处于 } i \text{ 的时间}}{t}.$$

如果上面定理中的 $\{p_j\}$ 之和为 1，则称 $\{p_j\}$ 是马氏链的 **极限分布**.

定义 2.1

对于任何 $h > 0$，称 $\{X(nh)\} = \{X(nh) | n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为马氏链 $\{X(t)\}$ 的一个离散骨架 或 h 骨架.

命题 2.2

以下的三个命题等价：

(1) $i \to j$;

(2) 对于某个 h 骨架 $i \to j$;

(3) 对于任何离散骨架 $i \to j$.

证明.
显然有 (3) ⇒ (2) ⇒ (1). 只要再证明 (1) ⇒ (3). 设 $p_{ij}(t) > 0$. 注意 $p_{ii}(s) > 0$ 总成立. 对于任何固定的 $h > 0$, 当 n 使得 $nh - t > 0$ 时, 有

$$p_{ij}(nh) = p_{ij}(nh - t + t) \geq p_{ii}(nh - t)p_{ij}(t) > 0.$$

这就证明了 (1) ⇒ (3). □

对于选定的 h 骨架来讲，i 是正常返状态的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(nh) = \infty.$$

由于所有的状态非周期，所以 i 是正常返状态的充分必要条件是

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} p_{ii}(nh) > 0.$$

命题 2.3

设 $\{X(nh)\}$ 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的 h 骨架，则

(1) i 是 $\{X(nh)\}$ 的常返状态，当且仅当

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = \infty;$$

(2) i 是某个 h 骨架的常返状态，当且仅当 i 是一切离散骨架的常返状态.

证明.

只要证明对任一个固定的 $h>0$, (??) 和 (??) 等价. 因为 $p_{ii}(t)$ 连续, 用积分中值定理得到

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_{nh}^{(n+1)h} p_{ii}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty hp_{ii}(nh+s_n),$$

其中 $s_n\in(0,h)$. 引入 $\gamma_h=\inf_{0\le s\le h} p_{ii}(s)$, 我们知道 $\gamma_h>0$, 且

$$p_{ii}(nh+s_n)\ge p_{ii}(nh)p_{ii}(s_n)\ge p_{ii}(nh)\gamma_h,$$

于是得到

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t \ge \sum_{n=0}^\infty h\gamma_h p_{ii}(nh). \tag{2.1}$$

再利用

$$p_{ii}(nh+s_n)=\frac{p_{ii}(nh+s_n)p_{ii}(h-s_n)}{p_{ii}(h-s_n)}\le \frac{p_{ii}(nh+h)}{\gamma_h},$$

得到

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)\mathrm{d}t \le \frac{h}{\gamma_h}\sum_{n=0}^\infty p_{ii}(nh+h). \tag{2.2}$$

(2.1) 和 (2.2) 保证了结论 (1). 从 (1) 自然得到 (2). □

命题 2.4

如果 i 是某个 h 骨架的正常返状态，则它是所有离散骨架的正常返状态.

定义 2.5

对于马氏链 $\{X(t)\}$，当 i 是某 h 骨架的常返状态时，称 i 是 $\{X(t)\}$ 的常返状态；当 i 是某 h 骨架的非常返状态时，称 i 是 $\{X(t)\}$ 的非常返状态；当 i 是某 h 骨架的正常返状态时，称 i 是 $\{X(t)\}$ 的正常返状态；当 i 是某 h 骨架的零常返状态时，称 i 是 $\{X(t)\}$ 的零常返状态.

设马氏链 $\{X(t)\}$ 的状态互通，根据离散时间马氏链的性质得到以下结论：

$\{X(t)\}$ 只要有一个常返状态，则所有状态常返，这时称$\{X(t)\}$ 是常返的；
$\{X(t)\}$ 只要有一个非常返状态，则所有状态非常返，这时称$\{X(t)\}$ 是非常返的；
$\{X(t)\}$ 只要有一个正常返状态，则所有状态正常返，这时称$\{X(t)\}$ 是正常返的；
$\{X(t)\}$ 只要有一个零常返状态，则所有状态零常返，这时称$\{X(t)\}$ 是零常返的.

$p_{ij}(t)$ 的极限

马氏链的 h 骨架和状态分类

平稳不变分布

前面的结论还是很难实际计算出极限概率 $\{p_j\}$，我们还是求助于嵌入链 $\{X_n\}$。用 $K=(k_{ij})$ 表示嵌入链的一步转移概率矩阵。如果嵌入链是一个正常返等价类，则其平稳不变分布 $\boldsymbol{\pi}=[\pi_0,\pi_1,\cdots]$ 是方程组

$$\begin{cases}\pi_j=\sum_{i\in I}\pi_i k_{ij}, & j\in I,\\ \sum_{j\in I}\pi_j=1,\end{cases} \quad \text{或等价地} \quad \begin{cases}\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}K,\\ \sum_{j\in I}\pi_j=1\end{cases}$$

的唯一解。如果嵌入链还是非周期的，则 $\pi_j=\lim_{n\to\infty}k_{ij}^{(n)}$ 也是嵌入链的平稳分布。

定义 3.1

设 $P(t)$ 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵，如果概率分布列 $\boldsymbol{p} = [p_0, p_1, \cdots]$ 满足方程组

$$p_j = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t),\ j \in I,\ \text{或等价地}\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}P(t),\ t \geq 0, \tag{3.1}$$

则称 $\boldsymbol{p}$ 是 $\{X(t)\}$ 的平稳分布或平稳不变分布.

对于互通马氏链，我们知平稳不变分布就是极限分布：
$p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t),\ j \in I$.

命题 3.2

如果马氏链 $\{X(t)\}$ 以平稳分布 $\boldsymbol{p}$ 为初始分布, $P(X(0)=i)=p_i$, $i \in I$, 则

(1) $X(t)$ 和 $X(0)$ 同分布;

(2) $\{X(t)\}$ 是严平稳过程.

证明.
这时对任何状态 $j \in I$，$X(t)$ 的分布

$$
\begin{aligned}
P(X(t)=j) &= \sum_{i \in I} P(X(0)=i) P(X(t)=j \mid X(0)=i) \\
&= \sum_{i \in I} p_i p_{ij}(t) = p_j = P(X(0)=j)
\end{aligned}
$$

与 t 无关，这就证明了结论 (1).

证明.

又我们有 $s > 0, 0 \leqslant to < t_1 < \cdots < t_n$,

$$\begin{aligned} & P(X(t_0+s)=i_0, X(t_1+s)=i_1, \ldots, X(t_n+s)=i_n) \\ &= p_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1-t_0) p_{i_1 i_2}(t_2-t_1) \ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_n-t_{n-1}) \end{aligned}$$

与 s 无关. 这说明 $\{X(t)\}$ 的有限维分布不随时间的推移变化，所以是严平稳过程. $\square$

对生灭过程和连续时间的分支过程我们都比较容易地得到了转移速率矩阵 Q. 一般来讲，在实际问题中得到转移速率矩阵 Q 要容易得多，但是得到转移概率矩阵 $P(t)$ 相对困难一些. 所以要得到马氏链的平稳分布，最好能够从转移速率矩阵 Q 入手. 平稳分布的定义 $\boldsymbol{p}P(t) = \boldsymbol{p}$ 也提示我们，形式上应当有 $\boldsymbol{p}Q = \boldsymbol{p}P'(t)\mid_{t=0} = \boldsymbol{p}' = \mathbf{0}$. 所以平稳分布应当由 $\boldsymbol{p}Q = \mathbf{0}$ 解出. 下面的定理部分地解决了这个问题.

注意，如果马氏链 $\{X(t)\}$ 的状态互通，则没有吸引状态，一切 $q_i > 0$. 这里排除了马氏链只有一个状态的情况，因为只有一个状态的马氏链是一个常数.

定理 3.3

设互通马氏链 $\{X(t)\}$ 有转移速率矩阵 Q，则

(1) $\{X(t)\}$ 正常返当且仅当 $\{X(t)\}$ 有唯一的平稳不变分布；

(2) $\{X(t)\}$ 正常返当且仅当对某个 j，$p_j = \lim_{i\to\infty} p_{ij}(t) > 0$. 当条件成立时，所有的 $p_j == \lim_{i\to\infty} p_{ij}(t) > 0$，且构成平稳不变分布；

(3) $\{X(t)\}$ 正常返的充分必要条件是方程组

$$\begin{cases} \sum_{i\in I} p_i q_{ij} = 0, \\ \sum_{j\in I} p_j = 1, \end{cases} \quad \text{或等价地} \quad \begin{cases} pQ = 0, \\ \sum_{j\in I} p_j = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

有唯一非负解 $\boldsymbol{p}$. 这时 $\boldsymbol{p}$ 是 $\{X(t)\}$ 的唯一平稳不变分布；

(4) 当 $\{X(t)\}$ 常返时，$\sum_{i\in I} p_i q_{ij} = 0$ 有非零非负解，且任何两个解只相差一个常数因子;

(5) 若嵌入链有平稳不变分布 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \cdots]$，则

$$p_j \equiv \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{\pi_j/q_j}{\sum_{i\in I} \pi_i/q_i}, \ j \in I.$$

证明.

(1) 如果 $\{X(t)\}$ 有平稳不变分布 $\mathbf{p}$, 则 $p_j = \sum_{i\in I} p_i p_{ij}(nh)$, $\sum_{j\in I} p_j = 1$. 这说明 $\mathbf{p}$ 是 h 骨架的平稳不变分布. 我们知道 h 骨架正常返，于是马氏链 $\{X(t)\}$ 正常返. 反之，如果 $\{X(t)\}$ 正常返，则 h 骨架正常返，从而遍历，且 h 骨架的平稳分布 $\mathbf{p}$ 满足

$$p_j = \sum_{i\in I} p_i p_{ij}(nh), \quad \sum_{j\in I} p_j = 1.$$

对确定的 h，令 $n \to \infty$，我们有

$$p_j = \sum_{i\in I} p_i a_j = a_j, \quad \text{其中} a_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(nh),$$

与 h 无关，说明

$$p_j = \sum_{i\in I} p_i p_{ij}(nh), \quad \sum_{j\in I} p_j = 1.$$

对于所有的 h 成立，即有 (3.1) 成立。因为 h 骨架的平稳不变分布唯一，$\{X(t)\}$ 的平稳不变分布是 h 骨架的平稳不变分布，所以也是唯一的.

证明.

(2) 如果 $\{X(t)\}$ 正常返，则有平稳不变分布 $\{p_j\}$，在 (3.1) 的第一个公式中令 $t\to\infty$，得到对某个 j 有 $p_{ij}(t)\to p_j>0$. 反之，如果对某个 j 有 $p_{ij}(t)\to p_j>0$，则对某 h 骨架有 $p_{ij}(nh)\to p_j>0$. 这说明这个 h 骨架正常返，从而 $\{X(t)\}$ 是正常返的. 最后从 h 骨架正常返和 $\{X(t)\}$ 有唯一的平稳不变分布知道所有的 $p_j=\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)>0$，且构成平稳不变分布.

为了避免求和与求极限交换时的麻烦，只对有限状态的情况给出后面的证明

(3) 先证明 (3.2) 的非负解是平稳分布，从而唯一。如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是 (3.2) 的非负解，在 $\boldsymbol{\eta}Q=0$ 两边右乘 $P(t)$，用向后方程得到

$$\boldsymbol{\eta}QP(t)=\boldsymbol{\eta}P'(t)=(\boldsymbol{\eta}P(t))'=0,\quad t\ge 0.$$

这说明 $\boldsymbol{\eta}P(t)=\mathbf{C}$ 是常数向量。再令 $t=0$ 得到 $\mathbf{C}=\boldsymbol{\eta}$，于是有 $\boldsymbol{\eta}P(t)=\boldsymbol{\eta}$。这说明 $\boldsymbol{\eta}$ 是平稳不变分布，这时的 $\{X(t)\}$ 正常返.

再证明平稳分布满足 (3.2). 从平稳分布的定义知道 $\mathbf{p}P(t)=\mathbf{p}, t\ge 0$。两边求导数得到 $\mathbf{p}Q=\mathbf{p}P'(t)|_{t=0}=0$。这说明平稳分布满足 (3.2).

证明.

(4) 因为状态有限，所以正常返和有平稳不变分布 $\mathbf{p}=\mathbf{p}P(t)$。对 $t=0$ 求导数得到 $\mathbf{p}Q=0$，此即 $\sum_{i\in I}p_iq_{ij}=0$ 有正解。如果 $\boldsymbol{\eta}$ 也是 $\sum_{i\in I}p_iq_{ij}=0$ 的解，写成矩阵的形式得到 $\boldsymbol{\eta}Q=0$，两边右乘 $P(t)$ 得到 $\boldsymbol{\eta}QP(t)=(\boldsymbol{\eta}P(t))'=0$。于是知道 $\boldsymbol{\eta}P(t)=\boldsymbol{\eta}$。对于平稳不变分布 $\mathbf{p}$，取 m 使得 $m\mathbf{p}+\boldsymbol{\eta}$ 的每个元 >0，从 (1) 知道 $m\mathbf{p}+\boldsymbol{\eta}$ 和 $\mathbf{p}$ 相差一个常数因子。于是 η 和 $\mathbf{p}$ 相差一个常数因子.

证明.

(5) 嵌入链有唯一的平稳不变分布 π. 我们有

$$k_{jj}=0,\quad k_{ij}=\frac{q_{ij}}{q_i},\quad j\neq i,$$

利用 $q_{jj}/q_j=-1$ 得到

$$\sum_{i\in I}\pi_i\frac{q_{ij}}{q_i}=\sum_{i\neq j}\pi_i k_{ij}+\pi_j\frac{q_{jj}}{q_j}=\pi_j-\pi_j=0.$$

于是对 $\eta_i=\pi_i/q_i$，有

$$\sum_{i\in I}\eta_i q_{ij}=\sum_{i\in I}\pi_i\frac{q_{ij}}{q_i}=0.$$

从 (4) 知道 $\{\eta_i\}$ 和平稳不变分布 $\{p_i\}$ 相差一个常数因子，即 $p_i=c\eta_i=c\pi_i/q_i$，再从 $\sum_{i\in I}p_i=1$ 得到 $c=\left[\sum_{i\in I}\pi_i/q_i\right]^{-1}$，故结论成立.

命题 3.4

设正常返的马氏链 $\{X(t)\}$ 是平稳过程，马氏链 $\{Y(t)\}$ 的转移矩阵和 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵相同，则对任意 $m \geq 1$，$t_0 < t_1 < \cdots < t_m$，有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(Y(t_0+s)=i_0, Y(t_1+s)=i_1, \cdots, Y(t_m+s)=i_m) \\
=&P(X(t_0)=i_0, X(t_1)=i_1, \cdots, X(t_m)=i_m).
\end{aligned}
$$

证明.

用 $p_{ij}(t)$ 表示转移概率，用 $\mathbf{p} = [p_0, p_1, \cdots]$ 表示平稳不变分布。对于任何 i, j，我们知道 $\lim_{s\to\infty} p_{ij}(s) = p_j$，于是有

$$\lim_{s\to\infty} P(Y(s) = i_0) = \lim_{s\to\infty} \sum_{i\in I} P(Y_0 = i) p_{ii_0}(s)$$

$$= \sum_{i\in I} P(Y_0 = i) p_{i_0} = p_{i_0}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to\infty} P(Y(t_0+s) = i_0, Y(t_1+s) = i_1, \cdots, Y(t_m+s) = i_m) \\
=&\lim_{s\to\infty} P(Y(t_0+s) = i_0) p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{m-1} i_m}(t_m - t_{m-1}) \\
=&p_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{m-1} i_m}(t_m - t_{m-1}) \\
=&P(X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \cdots, X(t_m) = i_m).
\end{aligned}$$

□

由上面命题知当 s 充分大时，$(Y(t_0+s), Y(t_1+s), \cdots, Y(t_m+s))$ 与 $(X(t_0), X(t_1), \cdots, X(t_m))$ 的概率分布近似相同。因为 m 和 $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ 是任意的，所以说时间 s 充分大后，$\{Y(t+s) \mid t \geq 0\}$ 和 $\{X(t)\}$ 有近似的统计性质.

命题 3.5

对于一个生灭过程，它为非常返的当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} < \infty.$$

它是正常返的当且仅当

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} < \infty.$$

其中 $n = 0$ 时的项默认为 1. 这时平稳不变分布为

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} q^{-1}.$$

例 3.6

内科诊室只有一个医生，医生为每个病人的看病时间是来自指数总体 $\mathcal{E}(\mu)$ 的随机变量. 如果病人按照强度为 λ 的泊松流到达和排队等候，用马氏链描述诊室的总人数 (指正看病的人数 + 排队人数). 在稳定状态下，

(1) 计算平均队长;

(2) 计算病人的平均排队时间;

(3) 计算医生的可用度 (指稳定状态下医生在工作的概率).

解.

用 $X(t)$ 表示 t 时诊室的总人数. 已知 $x(t)=i>0$ 时，用 S 表示等待新到一人所需的时间，用 T 表示离开一人所需的时间，则 S，T 独立，$S\sim\mathcal{E}(\lambda)$, $T\sim\mathcal{E}(\mu)$. $\{X(t)\}$ 在 i 的停留时间为

$$\min\{S,T\}\sim\mathcal{E}(\lambda+\mu),$$

然后分别以概率

$$k_{i,i+1}=P(S<T)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},\ k_{i,i-1}=P(T<S)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

转向 $i+1$, $i-1$. 根据马氏链的结构知道 $\{X(t)\}$ 是马氏链, 且是生灭过程. 利用公式 $q_{ij}=k_{ij}q_i(i\neq j)$ 得到转移速率

$$q_{00}=-\lambda,\ q_{ii}=-(\lambda+\mu),\ i>0;\ q_{i,i+1}=\lambda,\ q_{i,i-1}=\mu.$$

解方程组得到

$$p_k=(1-\frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^k\equiv pq^k,\ k=0,1,\cdots.$$

于是知道只有当 $\lambda<\mu$ 时，马氏链是正常返的，有如上的平稳分布，在稳定状态下的平均队长是

$$EX(t)=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=pq\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{q}{p}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda},\ \lambda<\mu.$$

解.
因为诊室的人数为 $X(t)$，所以 t 时到达的人需要排队的时间为

$$\sum_{k=1}^{X(t)} \tau_k,\ \ \tau_k \sim \mathcal{E}(\mu).$$

其中 τ_k 是第 k 个人的看病时间. 因为 $X(t)$ 与 $\{\tau_i\}$ 独立，由瓦尔德定理我们有平均排队时间为

$$E[\sum_{k=1}^{X(t)} \tau_k] = E[X(t)]E[\tau_1] = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)},\ \ \lambda < \mu.$$

医生的可用度为

$$1 - p_0 = \lambda/\mu.$$

□