第 28 讲 时间可逆马氏链

时间可逆的马氏链

可逆分布的计算

生灭过程常返性的判定

定义 1.1

设 $\{X(t)\}$ 是平稳过程，如果对于任何 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$，随机向量

$$(X(T-t_1), X(T-t_2), \ldots, X(T-t_n)) \text{ 和 } (X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) \text{ 同分布,} \tag{1.1}$$

则称 $\{X(t)\}$ 是**可逆平稳过程** (time reversible stationary process).

如果马氏链 $\{X(t)\}$ 是可逆平稳过程，则可以把时间的方向倒过来观测这个过程. 对于任何正数 T，定义倒向随机过程 $Y(t) = X(T-t), t \in [0,T]$. 当 $\{X(t)\}$ 可逆时，$\{Y(t)\}$ 也是马氏链，因为对于任何正整数 n, $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} \le T$，利用 (1.1) 得到

$$\begin{aligned} & P(Y(t_{n+1}) = j, Y(t_n) = i, \ldots, Y(t_0) = i_0) \\ = & P(X(t_{n+1}) = j, X(t_n) = i, \ldots, X(t_0) = i_0). \end{aligned}$$

再利用条件概率公式得到

$$
\begin{aligned}
&P(Y(t_{n+1})=j \mid Y(t_n)=i, Y(t_{n-1})=i_{n-1},\ldots,Y(t_0)=i_0)\\
=&P(X(t_{n+1})=j \mid X(t_n)=i, X(t_{n-1})=i_{n-1},\ldots,X(t_0)=i_0)\\
=&P(X(t_{n+1}-t_n)=j \mid X(0)=i)\\
=&P(Y(t_{n+1}-t_n)=j \mid Y(0)=i)
\end{aligned}
$$

与 $i,j,t_{n+1}-t_n$ 有关，说明 $\{Y(t)\}$ 和 $\{X(t) \mid t\in[0,T]\}$ 有相同的转移概率，从而有相同的统计行为. 这也正是可逆的含义.

定义 1.2

设 $P(t)$ 是马氏链 $\{X(t)\}$ 的转移概率矩阵，当概率分布 $\mathbf{p} = [p_0, p_1, \dots]$ 满足

$$p_i p_{ij}(t) = p_j p_{ji}(t), \quad i, j \in I, t \geq 0 \tag{1.2}$$

时，称 $\mathbf{p}$ 为 $\{X(t)\}$ 的**平稳可逆分布**或**可逆分布**.

命题 1.3

如果 p 为马氏链 $\{X(t)\}$ 的平稳可逆分布，则
(1) p 是 $\{X(t)\}$ 的平稳不变分布；
(2) 当 $\{X(t)\}$ 以 p 为初始分布时，$\{X(t)\}$ 是平稳可逆过程.

证明.

(1) 在 $p_i p_{ij}(t) = p_j p_{ji}(t)$ 的两边对于 j 求和，就得到

$$p_i = \sum_{j \in I} p_j p_{ji}(t), \quad i \in I,\ t \geq 0.$$

于是 p 是平稳不变分布.

(2) 当 $P(X(0)=i)=p_i$ 时，$\{X(t)\}$ 是严平稳过程，$X(t)$ 与 $X(T-t)$ 同分布. 所以 (1.1) 对于 $n=1$ 成立. 对任何 $0 \leq s < t \leq T$，有 $T-t < T-s$，于是有

$$\begin{aligned} & P(X(T-s)=i, X(T-t)=j) \\ &= p_j p_{ji}(t-s) = p_i p_{ij}(t-s) \\ &= P(X(s)=i,\ X(t)=j). \end{aligned}$$

这说明对 $n=2$, (1.1) 成立. 完全相同的方法可以证明 (1.1) 对于一般的 n 成立，说明 $\{X(t)\}$ 是平稳可逆过程. $\square$

在平稳可逆分布满足的公式 (1.2) 中，对 t 求导数，利用 $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ 得到

$$p_i q_{ij} = p_j q_{ji}, \quad i, j \in I. \tag{1.3}$$

于是可以通过解 (1.3) 得到平稳可逆分布 p. 但 (1.3) 是否有解呢？下面定理回答这个问题.

定理 1.4

设 $\{X(t)\}$ 互通，有转移速率矩阵 Q 和平稳不变分布，则

(1) 有解时，(1.2) 和 (1.3) 有相同的非负解；

(2) 满足 (1.3) 的概率分布 p 是 $\{X(t)\}$ 的平稳可逆分布.

证明.
(1) 当 p 解自 (1.2)，在 (1.2) 式的两边对 $t=0$ 求导数，得到 (1.3). 当 p 满足 (1.3)，在 (1.3) 的两边对 j 求和，得到 $0=\sum_j p_j q_{ji}$. 于是知 p 和平稳分布相差一个常数因子. 引入

$$g_{ij}(t) \equiv \frac{p_j p_{ji}(t)}{p_i},$$

从 K-C 方程知道 $g_{ij}(t)$ 也满足 K-C 方程

$$g_{ij}(s+t) = \sum_{k\in I} \frac{p_j p_{jk}(t)}{p_k} \frac{p_k p_{ki}(s)}{p_i} = \sum_{k\in I} g_{ik}(s) g_{kj}(t).$$

从 $p_i = \sum_{j\in I} p_j p_{ji}(t)$ 知道 $\sum_{j\in I} g_{ij}(t) = 1$, 并且 $g_{ij}(0) = \lim_{t\downarrow 0} g_{ij}(t) = \delta_{ij}$.

证明.

将 $g_{ij}(t)$ 代入柯尔莫哥洛夫向前方程

$$p'_{ji}(t) = \sum_{k\in I} p_{jk}(t) q_{ki},$$

得到柯尔莫哥洛夫向后方程

$$\begin{aligned} g'_{ij}(t) &= \frac{p_j}{p_i} p'_{ji}(t) = \sum_{k\in I} \frac{p_j}{p_i} p_{jk}(t) q_{ki} = \sum_{k\in I} \frac{p_j p_{jk}(t)}{p_k} \frac{p_k q_{ki}}{p_i} \\ &= \sum_{k\in I} g_{kj}(t) \frac{p_i q_{ik}}{p_i} = \sum_{k\in I} q_{ik} g_{kj}(t). \end{aligned}$$

由于向后方程的解是唯一的, 所以

$$g_{ij}(t) = \frac{p_j p_{ji}(t)}{p_i} = p_{ij}(t), \quad i, j \in I.$$

后一个等号说明 p 满足 (1.3). (2) 由 (1) 直接得到. $\square$

时间可逆的马氏链

可逆分布的计算

生灭过程常返性的判定

下面称满足

$$\mu_i q_{ij} = \mu_j q_{ji} \quad i,j \in I$$

的非负数列 $\{\mu_j\}$ 为 $\{X(t)\}$ 或 Q 的**对称化序列**. 如果 $\{X(t)\}$ 有对称化序列, 则称 $\{X(t)\}$ 是**对称马氏链**. 用 $k_{ij} = q_{ij}/q_i$ $(i \neq j)$ 表示嵌入链的转移概率. 仍然称满足

$$\eta_i k_{ij} = \eta_j k_{ji}, \quad i,j \in I$$

的非负数列 $\{\eta_j\}$ 为嵌入链的**对称化序列**. 因为

$$\mu_i q_{ij} = \mu_j q_{ji} \quad \text{当且仅当} \quad \mu_i q_i k_{ij} = \mu_j q_j k_{ji}, \tag{2.1}$$

所以嵌入链有对称化序列 $\{\eta_i\}$ 的充分必要条件是 $\{X(t)\}$ 有对称化序列 $\mu_i = \eta_i/q_i$.

下面假设 $\{X(t)\}$ 是互通马氏链. 我们知道, 嵌入链存在对称化序列的充分必要条件是柯尔莫哥洛夫条件成立，即：对于任何 $i, i_1, i_2, \cdots, i_k \in I$，有

$$k_{ii_1}k_{i_1i_2}\cdots k_{i_ki} = k_{ii_k}k_{i_ki_{k-1}}\cdots k_{i_1i}. \tag{2.2}$$

由于对于 $i \neq j$, $k_{ij} = q_{ij}/q_i$, 在 (2.2) 的两边同时除以 $q_iq_{i_1}\cdots q_{i_k}$ 就得到

$$q_{ii_1}q_{i_1i_2}\cdots q_{i_ki} = q_{ii_k}q_{i_ki_{k-1}}\cdots q_{i_1i}. \tag{2.3}$$

于是我们有, (2.3) 是互通马氏链 $\{X(t)\}$ 存在对称化序列的充分必要条件.

注意到, (2.2) 成立时，对于固定的 i，定义 $\eta_i = 1$；对于每个 j 及从 i 到 j 的通路 $i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to j$，定义

$$\eta_j = \frac{k_{ii_1} k_{i_1 i_2} \cdots k_{i_k j}}{k_{j i_k} k_{i_k i_{k-1}} \cdots k_{i_1 i}}, \tag{2.4}$$

则 $\{\eta_j\}$ 是 $K = \{k_{ij}\}$ 的对称化序列。于是从 (2.1) 知道，对于确定的 i，定义 $\mu_i = 1/q_i$；对于每个 $j \neq i$ 及从 i 到 j 的通路 $i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to j$，可以得到 $\{X(t)\}$ 的对称化序列

$$\begin{aligned}
\mu_j = \frac{\eta_j}{q_j} &= \frac{1}{q_j} \frac{k_{ii_1} k_{i_1 i_2} \cdots k_{i_k j}}{k_{j i_k} k_{i_k i_{k-1}} \cdots k_{i_1 i}} \cdot \frac{q_i q_{i_1} \cdots q_{i_k}}{q_i q_{i_1} \cdots q_{i_k}} \\
&= \frac{1}{q_i} \frac{q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_k j}}{q_{j i_k} q_{i_k i_{k-1}} \cdots q_{i_1 i}}, \qquad j \in I.
\end{aligned}$$

上式两边同乘以 q_i，引入 $\alpha_j = q_i \mu_j$，就有 $\alpha_i = q_i \mu_i = q_i \eta_i / q_i = 1$。于是可以把对称化序列写得更整齐一些：对确定的 i，取 $\alpha_i = 1$。对于 $j \neq i$ 和通路 $i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to j$，对称化序列为

$$\alpha_i = 1, \quad \alpha_j = \frac{q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_k j}}{q_{j i_k} q_{i_k i_{k-1}} \cdots q_{i_1 i}}, \quad j \neq i. \tag{2.5}$$

对于互通的马氏链，可以总结出计算可逆分布的步骤如下：

(1) 验证条件 (2.3) 对于任何 $i, i_1, i_2, \cdots, i_k$ 成立后用 (2.5) 计算出对称化序列 $\{\alpha_j\}$。或者先按 (2.5) 计算 $\{\alpha_j\}$，再验证 $\{\alpha_j\}$ 满足 $\alpha_i q_{ij} = \alpha_j q_{ji}$，$i, j \in I$。如满足，说明 $\{\alpha_j\}$ 是对称化序列；否则没有对称化序列，也就没有可逆分布。

(2) 当 $\{\alpha_j\}$ 是对称化序列时，如果 $c = \sum_{j \in I} \alpha_j < \infty$，则 $p_j = \alpha_j / c$ $(j \in I)$ 是平稳可逆分布，马氏链是正常返的；否则马氏链不是正常返的，平稳分布不存在.

只需要证明 (2)。在 $\alpha_i q_{ij} = \alpha_j q_{ji}$ 两边对 i 求和，用保守性得到 $\sum_{i \in I} \alpha_i q_{ij} = 0$。我们知道，当 $c < \infty$ 时，$p_j = \alpha_j / c$ 是平稳不变分布，$\{X(t)\}$ 正常返，于是 $\{p_j\}$ 是平稳可逆分布。当 $c = \infty$ 时，用反证法：假设 $\{X(t)\}$ 正常返，则有平稳不变分布 $\{p_j\}$。我们知道 $\{\alpha_j\}$ 和 $\{p_j\}$ 相差一个常数因子：$\alpha_j = a p_j$，$j \in I$。但是这与 $c = \infty$ 矛盾.

例 2.1

设 $\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}>0$，$\mu_1\mu_2\cdots\mu_n>0$。如果马氏链 $\{X(t)\}$ 有状态空间 $I=\{0,1,\cdots,n\}$ 和转移速率矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mu_n & -\mu_n \end{pmatrix},$$

计算平稳可逆分布.

解.
容易看出该有限马氏链是不不可约的，从而是正常返的。取

$$\alpha_0 = 1,$$
$$\alpha_k = \frac{q_{01}q_{12}\cdots q_{k-1,k}}{q_{10}q_{21}\cdots q_{k,k-1}} = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

有 $\alpha_0 q_{01} = \lambda_0 = (\lambda_0/\mu_1)\mu_1 = \alpha_1 q_{10}$。对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$，有

$$\alpha_k q_{k,k+1} = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\cdot\lambda_k}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_k\cdot\mu_{k+1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{k+1}} = \alpha_{k+1}q_{k+1,k},$$

所以 α_k 是对称化序列。取 $c_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，得到平稳可逆分布 $p_k = \alpha_k/c_0, \quad k \in I.$ $\square$

例 2.2

设 $\{\lambda_i | i \geqslant 0\}$ 和 $\{\mu_i | i \geqslant 1\}$ 是正数列，生灭过程 $\{X(t)\}$ 有状态空间 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 和转移速率矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

求平稳分布存在的条件，并计算其平稳分布.

证明.

我们知道

$$\alpha_0 = 1,$$
$$\alpha_k = \frac{q_{01}q_{12}\cdots q_{k-1,k}}{q_{10}q_{21}\cdots q_{k,k-1}} = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

是对称化序列。取 $c_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots$。当且仅当 $c_0 < \infty$ 时，$\{X(t)\}$ 存在平稳可逆分布

$$p_k = \alpha_k / c_0, \quad k \in I.$$

这时生灭过程 $\{X(t)\}$ 是正常返的。特别当 $\lambda_i = \lambda, \mu_i = \mu, \lambda < \mu$ 时，由

$$\alpha_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad c_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1},$$

得到平稳分布：

$$p_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \quad \square$$

我们考察生灭过程的嵌入离散时间马尔可夫链。设 u_n 表示过程从状态 n 出发，在到达状态 N 之前，先到达状态 0 的概率。这里 $0 \le n \le N$。显然，我们有两个边界条件：

- $u_0 = 1$ （已经到达状态 0）
- $u_N = 0$ （先到达了状态 N，未满足条件）

对于中间状态 $0 < n < N$，系统离开状态 n 时，只有两种可能：以概率 $\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\mu_n}$ 转移到状态 $n+1$（出生）。以概率 $\frac{\mu_n}{\lambda_n+\mu_n}$ 转移到状态 $n-1$（死亡）。根据全概率公式, 我们可以建立递推关系:

$$u_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} u_{n+1} + \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} u_{n-1}$$

将等式两边同乘 $(\lambda_n + \mu_n)$:

$$(\lambda_n + \mu_n) u_n = \lambda_n u_{n+1} + \mu_n u_{n-1}$$

重新移项，构造出相邻项的差值:

$$\lambda_n (u_{n+1} - u_n) = \mu_n (u_n - u_{n-1})$$

即:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\mu_n}{\lambda_n} (u_n - u_{n-1})$$

利用上面得到的递推式，我们可以将任意相邻两项的差展开，一直递推到 $u_1 - u_0$：

$$u_2 - u_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1}(u_1 - u_0)$$

$$u_3 - u_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_2}(u_2 - u_1) = \frac{\mu_2\mu_1}{\lambda_2\lambda_1}(u_1 - u_0)$$

$$\cdots$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\lambda_i}\right)(u_1 - u_0) = W_n(u_1 - u_0)$$

其中 $W_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\lambda_i}$.

定义 $W_0 = 1$。因为 $u_0 = 1$，所以 $(u_1 - u_0) = u_1 - 1$。现在，我们将 n 从 0 累加到 $N-1$：

$$\sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=0}^{N-1} W_n (u_1 - 1)$$

等式左边是一个裂项相消的和，其结果为 $u_N - u_0$。代入边界条件 $u_N = 0$ 和 $u_0 = 1$，左边等于 -1。因此我们得到：

$$-1 = (u_1 - 1) \sum_{n=0}^{N-1} W_n$$

由于 $W_0 = 1$，求和项可以写成 $1 + \sum_{n=1}^{N-1} W_n$。解出 u_1：

$$u_1 = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N-1} W_n}.$$

u_1 是从状态 1 出发，在到达 N 之前返回 0 的概率。我们令 $N \to \infty$，此时 u_1 的极限（记为 f_{10}）就代表了从状态 1 出发，最终能够返回状态 0 的绝对概率：

$$f_{10} = \lim_{N\to\infty} u_1 = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} W_n}$$

对于不可约的生灭过程，状态 0 是常返的，当且仅当从状态 0 出发最终一定能回到 0（概率为 1）。由于状态 0 只能转移到状态 1（因为 $\mu_0 = 0$），所以“从 0 出发一定回到 0”逻辑上等价于“从 1 出发一定能到达 0”，即要求 $f_{10} = 1$。根据上面的极限公式：

$$f_{10} = 1 \iff \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} W_n} = 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \infty.$$

定理 3.1

对于不可约的生灭过程，所有的状态具有相同的常返性。判别该过程是否常返（Recurrent）的充要条件是：

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right) = \infty$$

例 3.2

以下三个生灭过程哪个是非常返的，哪个是零常返的，哪个是正常返的？对于正常返马氏链计算平稳分布.

(a) $\lambda_n = n+2, \mu_n = n$;

(b) $\lambda_n = n+1, \mu_n = n$;

(c) $\mu_n = n, \lambda_0 = \lambda_1 = 1$, 对 $n \geq 2, \lambda_n = n-1$.

解.

对于一个状态空间为 $\{0,1,2,\ldots\}$ 的生灭过程，设其生速率为 $\lambda_n > 0$（对 $n \geq 0$），灭速率为 $\mu_n > 0$（对 $n \geq 1$，且令 $\mu_0 = 0$）。判定生灭过程常返与否，关键在于计算以下两个级数：常返性判别式：

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}$$

若 $R = \infty$，则过程是常返的；若 $R < \infty$，则过程是非常返的。平稳分布判别式（正常返判别式）：在已知过程常返（即 $R = \infty$）的前提下，我们检查平稳分布的测度级数：

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$$

若 $S < \infty$，则过程是正常返（Positive Recurrent）的，此时存在平稳分布；若 $S = \infty$，则过程是零常返的。现在，我们对题目中的 (a)、(b)、(c) 三个具体情形逐一进行计算和分类.

解.

(a) $\lambda_n = n+2, \quad \mu_n = n$ 首先计算常返性判别式中的项。对 $n \geq 1$:

$$\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{3\cdot 4\cdots(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

由此计算级数 R:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 < \infty.$$

由于 $R < \infty$，该过程是非常返的.

解.

(b) $\lambda_n = n+1, \quad \mu_n = n$ 同样先计算常返性判别式的项。对 $n \geq 1$:

$$\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{2\cdot 3\cdots(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

由此计算级数 R:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \infty \quad \text{(调和级数发散)}$$

因为 $R=\infty$，该过程是常返的。接下来我们需要判定它是正常返还是零常返，计算级数 S。对 $n \geq 1$:

$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n} = 1$$

由此计算级数 S:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

由于 $R=\infty$ 且 $S=\infty$，该过程是零常返的.

解.

(c) $\mu_n = n, \quad \lambda_0 = \lambda_1 = 1, \quad$ 对$n \geq 2, \lambda_n = n-1$ 我们先看常返性判别式。当 $n \geq 2$ 时:

$$\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1)} = n$$

由此计算级数 R:

$$R = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n = \infty$$

因为 $R=\infty$，该过程是常返的。接着进一步计算级数 S 来判定正常返性。当 $n \geq 2$ 时:

$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdots(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

由此计算级数 S:

$$S = \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1+1 = 2 < \infty.$$

由于 $R=\infty$ 且 $S<\infty$，该过程是正常返的.

解.

根据生灭过程的平衡方程 $\pi_n\lambda_n = \pi_{n+1}\mu_{n+1}$，我们有：

$$\pi_n = \pi_0 \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$$

代入前面算出的各项系数：$\pi_1 = \pi_0 \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \pi_0 \cdot 1 = \pi_0$ 对于 $n \geq 2$：$\pi_n = \pi_0 \cdot \frac{1}{n(n-1)}$
利用全概率公式归一化 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$：

$$\pi_0 + \pi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \pi_n = \pi_0 + \pi_0 + \pi_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

$$2\pi_0 + \pi_0 \cdot 1 = 3\pi_0 = 1 \implies \pi_0 = \frac{1}{3}$$

由此得到平稳分布为：

$$\pi_0 = \frac{1}{3},\ \pi_1 = \frac{1}{3},\ \pi_n = \frac{1}{3n(n-1)} \quad (n \geq 2). \quad \square$$