

第 30 讲 第四部分总结: 连续时间马尔可夫链

总结: 连续时间马尔可夫链

例题

1. 连续马尔可夫链的定义
2. 转移速率矩阵 重点: 转移概率矩阵和转移速率矩阵的关系
3. 马氏链的结构
4. 柯尔莫哥洛夫方程 重点: 柯尔莫哥洛夫方程求解转移概率
5. 生灭过程
5. 马氏链的极限分布, 可逆时间马尔可夫链 重点: 连续时间马氏链的极限分布的求解, 连续时间马氏链的常返性, 正常返性的判定

总结: 连续时间马尔可夫链

例题

例 2.1

对于马氏链的转移概率 $p_{jj}(t)$, 证明:

- (1) $p_{jj}(t + s) \leq 1 - p_{jj}(t) + p_{jj}(s)p_{jj}(t)$;
- (2) 当 $t > s$ 时, $|p_{jj}(t) - p_{jj}(s)| \leq 1 - p_{jj}(t - s)$.

证明.

(1) 根据柯尔莫哥洛夫-查普曼方程, 将状态 j 从求和项中单独分出来:

$$p_{jj}(t+s) = p_{jj}(t)p_{jj}(s) + \sum_{k \neq j} p_{jk}(t)p_{kj}(s)$$

我们知道, 对于任意状态 j , 在时刻 t 从 j 出发到达所有状态的概率之和为 1:

$$\sum_{k \in I} p_{jk}(t) = p_{jj}(t) + \sum_{k \neq j} p_{jk}(t) = 1$$

因此, 可以得到: $\sum_{k \neq j} p_{jk}(t) = 1 - p_{jj}(t)$ 由于转移概率 $p_{kj}(s) \leq 1$, 我们将方程代入并利用不等式:

$$\begin{aligned} p_{jj}(t+s) &= p_{jj}(t)p_{jj}(s) + \sum_{k \neq j} p_{jk}(t)p_{kj}(s) \\ &\leq p_{jj}(t)p_{jj}(s) + \sum_{k \neq j} p_{jk}(t) \cdot 1 \\ &= p_{jj}(s)p_{jj}(t) + (1 - p_{jj}(t)) \\ &= 1 - p_{jj}(t) + p_{jj}(s)p_{jj}(t). \end{aligned}$$

总结: 连续时间马尔可夫链

例题

证明.

(2) 对于 $t > s$:

$$p_{jj}(t) = \sum_{k \in I} p_{jk}(t-s)p_{kj}(s) = p_{jj}(t-s)p_{jj}(s) + \sum_{k \neq j} p_{jk}(t-s)p_{kj}(s)$$

由于 $p_{kj}(s) \leq 1$, 我们有:

$$p_{jj}(t) \leq p_{jj}(t-s)p_{jj}(s) + \sum_{k \neq j} p_{jk}(t-s) = p_{jj}(t-s)p_{jj}(s) + 1 - p_{jj}(t-s)$$

整理得:

$$p_{jj}(t) - p_{jj}(s) \leq 1 - p_{jj}(t-s) - p_{jj}(s)(1 - p_{jj}(t-s)) \leq 1 - p_{jj}(t-s).$$

另一方面, 由于 $p_{jj}(t) \geq p_{jj}(s)p_{jj}(t-s)$, 我们有

$$\begin{aligned} p_{jj}(s) - p_{jj}(t) &\leq p_{jj}(s)(1 - p_{jj}(t-s)) \\ &\leq 1 - p_{jj}(t-s), \end{aligned}$$

综上, 我们有

$$|p_{jj}(t) - p_{jj}(s)| \leq 1 - p_{jj}(t-s). \quad \square$$

总结: 连续时间马尔可夫链

例题

例 2.2

一质点在 1, 2, 3 点上做随机游动. 若在时刻 t 质点位于这三个点之一, 则在 $[t, t+h)$ 内, 它以概率 $\frac{1}{2}h + o(h)$ 分别转移到其他二点之一. 试求质点随机游动的柯尔莫哥洛夫方程, 转移概率 $p_{ij}(t)$ 及平稳分布.

解.

Kolmogorov 向前方程为

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t) + \frac{1}{2}p_{i,j-1}(t) + \frac{1}{2}p_{i,j+1}(t).$$

由于状态空间 $I = \{1, 2, 3\}$, 所以

$$p_{ij}(t) + p_{i,j-1}(t) + p_{i,j+1}(t) = 1,$$

从而

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t) + \frac{1}{2}(1 - p_{ij}(t)) = -\frac{3}{2}p_{ij}(t) + \frac{1}{2}.$$

解上述一阶线性微分方程得

$$p_{ij}(t) = ce^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{3}.$$

总结: 连续时间马
尔可夫链

例题

解.

由初始条件知

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t} & i \neq j, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} & i = j. \end{cases}$$

故其平稳分布为

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \frac{1}{3}, \quad j = 1, 2, 3.$$



例 2.3

在例 25.17 中, 如果到达的病人发现需要等候, 就放弃看病, 用马氏描述诊室的总人数, 在稳定状态下,

- (a) 计算诊室的平均人数;
- (b) 计算医生的可用度;
- (c) 计算能看病人数占到达人数的比例.

解.

用 $X(t)$ 表示诊室的总人数, 则 $X(t) = 0$ 或 1 . 用 S 表示 $X(t) = 0$ 时等待新到一个人所需的时间, 用 T 表示 $X(t) = 1$ 时离开一人所需的时间, 则 S, T 独立且 $S \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $T \sim \mathcal{E}(\mu)$. 于是我们知 $q_{00} = -\lambda$, $q_{11} = -\mu$. 于是转移速率矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

于是平稳分布 (p_0, p_1) 满足方程组

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0 \\ \lambda p_0 - \mu p_1 &= 0 \\ p_0 + p_1 &= 1 \end{cases}$$

于是 $p_0 = \mu/(\lambda + \mu)$, $p_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$.

(a) 诊室的平均人数为 $0p_0 + 1p_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$.

(b) 医生的可用度为 $1 - p_0 = \lambda/(\lambda + \mu)$.

(c) 能看病人数占到达人数的比例为 $E[S]/E[S + T] = \frac{1/\lambda}{1/\mu + 1/\lambda} = \mu/(\lambda + \mu)$. $\square$

例 2.4

某人有三块全自动机械旧手表（假设不用时自动停摆），一开始使用其中的一块，其他两块备用。当使用的手表发生故障后马上送去修理，同时开始使用备用手表。假设故障手表的修理时间是来自指数总体 $\mathcal{E}(\mu)$ 的随机变量，修好的手表的工作时间是来自指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$ 的随机变量，在同一时间修表部只能修理一块手表。在稳定状态下，计算他没有表用的概率。

解.

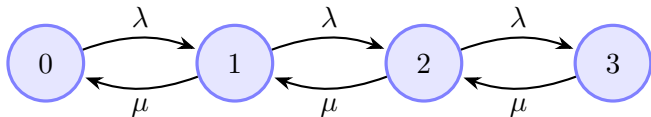
系统中总共有 3 块手表。我们可以用处于故障（正在修理或等待修理）的手表数量 $X(t)$ 来表示系统在时刻 t 的状态。因为只有 1 个修表师傅（同一时间只能修理一块表），且总共只有 3 块表，所以可能的状态有：

- ▶ 状态 0：0 块表损坏（1 块在运行，2 块备用）。
- ▶ 状态 1：1 块表损坏（1 块在修，1 块在运行，1 块备用）。
- ▶ 状态 2：2 块表损坏（1 块在修，1 块在运行，0 块备用）。
- ▶ 状态 3：3 块表损坏（1 块在修，2 块排队等待，0 块在运行——即“没有表用”）。

题目要求计算的“在稳定状态下，他没有表用的概率”，即求平稳分布下的 P_3 。

解.

根据题目给出的指数分布: 工作寿命服从指数总体 $\mathcal{E}(\lambda)$, 意味着单块正常工作的表的故障速率为 λ 。注意: 无论何时, 最多只有 1 块表在运行 (其他没坏的表作为备用自动停摆, 不计工作损坏率)。因此, 只要系统有可用的表 (状态 0, 1, 2), 从正常转为故障的整体速率恒为 λ 。修理时间服从指数总体 $\mathcal{E}(\mu)$, 意味着修理速率为 μ 。由于只有一个修表部且只能同时修一块, 只要有表坏了 (状态 1, 2, 3), 修理完成的整体速率恒为 μ 。我们可以画出如下的状态转移速率图:



解.

于是我们有

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \implies P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0,$$

$$\lambda P_1 = \mu P_2 \implies P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0,$$

$$\lambda P_2 = \mu P_3 \implies P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0.$$

令 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, 则各项可以表示为: $P_1 = \rho P_0$, $P_2 = \rho^2 P_0$, $P_3 = \rho^3 P_0$. 所有状态的
概率之和必然为 1: $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$.

解.

将上述以 P_0 表示的各项代入:

$$P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3) = 1$$

由此解得:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3}$$

从而, 我们所求的 “没有表用” 的概率 P_3 值为:

$$P_3 = \rho^3 P_0 = \frac{\rho^3}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3}$$

将 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 重新代回:

$$P_3 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = \frac{\lambda^3}{\mu^3 + \mu^2\lambda + \mu\lambda^2 + \lambda^3}. \quad \square$$

总结: 连续时间马
尔可夫链

例题

例 2.5

设随机过程 $X(t) = X + Yt + Zt^2$, 其中 X , Y 和 Z 是相互独立的随机变量, 且具有均值 0 和方差 1, 求随机过程 $X(t)$ 的协方差函数.

解.

我们有 $EX(t) = E[X + Yt + Zt^2] = E[X] + tE[Y] + t^2E[Z] = 0$. 于是随机过程 $X(t)$ 的协方差函数为

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) &= E[X(t_1)X(t_2)] = [E(X + Yt_1 + Zt_1^2)(X + Yt_2 + Zt_2^2)] \\ &= E[X^2] + t_1t_2E[Y^2] + t_1^2t_2^2E[Z^2] = 1 + t_1t_2 + t_1^2t_2^2.\end{aligned}$$



例 2.6

乘客按照强度为 λ 的泊松过程到达车站候车, 公交车每隔 5 分钟将候车的乘客全部送走, 为了缩短高峰时刻的乘客候车时间, 预备在两次发车时间中加发一班车 (将乘客全部运走). 请设计加车的时间使得平均候车时间最短.

解.

假设加班车的发车时间为 t , 第 i 个乘客的到达车站时间为 S_i , 所有乘客的候车时间为 $w(t)$, 则平均候车时间为:

$$\begin{aligned} E[w(t)] &= E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) + \sum_{i=N(t)+1}^{N(5)} (5 - S_i)\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right] + E\left[\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)} (5 - S_i)\right]. \end{aligned}$$

总结: 连续时间马
尔可夫链

例题

我们有

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right] &= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i) \middle| N(t)\right]\right] \\ &= E\left[\frac{t}{2} N(t)\right] \\ &= \frac{\lambda t^2}{2} \end{aligned}$$

解.
以及

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)} (5 - S_i)\right] &= E\left[E\left[\sum_{i=N(t)+1}^{N(5)} (5 - S_i) \mid N(t, 5)\right]\right] \\ &= E\left[\frac{5-t}{2} N(t, 5)\right] \\ &= \frac{5-t}{2} E[N(t, 5)]. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} E[w(t)] &= \frac{1}{2}\lambda t^2 + \frac{1}{2}\lambda(5-t)^2 \\ &= \lambda t^2 - 5\lambda t + 12.5\lambda. \end{aligned}$$

当 $t = 2.5$ 时, $E[w(t)]$ 取得最小值, 即在原来每辆公交车发车后 2.5 分钟加发一辆车, 可以使得旅客的平均候车时间最短.

例 2.7

设更新过程 $\{N(t)\}$ 的更新间隔有离散分布 $P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = 0.5$, 对于 $k = 1, 2, 3$, 计算 $p_j = P(N(k) = j)$.

证明.

对于 $k = 1$, 我们有

$$p_0 = P(N(1) = 0) = P(X_1 = 2) = 0.5, \quad p_1 = P(N(1) = 1) = P(X_1 = 1) = 0.5.$$

对于 $k = 2$, 我们有

$$\begin{aligned} p_1 &= P(N(2) = 1) = P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1, X_2 = 2) \\ &= P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) = 0.75, \\ p_2 &= P(N(2) = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = 0.25. \end{aligned}$$

对于 $k = 3$, 我们有

$$\begin{aligned} p_1 &= P(N(3) = 1) = P(X_1 = 2, X_2 = 2) = 0.25, \\ p_3 &= P(N(3) = 3) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0.125, \\ p_2 &= 1 - p_1 - p_3 = 0.625. \end{aligned}$$

例 2.8

假定每天入住某宾馆的家庭数是均值为 λ 的泊松随机变量. 再假定一个家庭在宾馆停留的天数是参数为 p ($0 < p < 1$) 的几何随机变量. (于是在前一晚上住在宾馆的一个家庭将在第二天退房的概率为 p , 独立于他们已经在宾馆住了多久.) 再假定所有的家庭是彼此独立的. 在这些条件下容易看出, 如果设 X_n 为在第 n 天开始时住在宾馆的家庭数, 那么 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是马尔可夫链. 求此马尔可夫链的转移概率.

解.

我们假定在一天开始时宾馆有 i 个家庭. 因为这 i 个家庭以概率 $q = 1 - p$ 再住一天, 由此推出这 i 个家庭中再住一天的家庭数是参数为 i 和 q 的二项随机变量. 所以, 如果设 N 为这天新入住的家庭数, 我们有

$$P_{i,j} = P(R_i + N = j).$$

以 R_i 为条件, 并且已知 N 是均值为 λ 的泊松随机变量, 我们得到

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \sum_{k=0}^i P(R_i + N = j | R_i = k) \binom{i}{k} q^k p^{i-k} \\ &= \sum_{k=0}^i P(N = j - k | R_i = k) \binom{i}{k} q^k p^{i-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} P(N = j - k) \binom{i}{k} q^k p^{i-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} \binom{i}{k} q^k p^{i-k}. \end{aligned}$$

